1

数系——从自然数到复数

董延闿 编

北京师范大学出版社

数　系

——从自然数到复数

董延闿　编

北京师范大学出版社

——从自然数到复数

董延闿 编

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京师范大学印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：6.25 字数：128千
1986年2月第1版 1987年4月第2次印刷
印数：12 501——15 000
统一书号：13243·64 定价：1.10元

序

这本小册子主要是为高等师范院校数学专业的同名选课编写的教材，也可作为中学数学教师的参考读物。本书向读者介绍从裴阿诺（Peano）公理出发，建立从自然数到复数的整个数的系统的公理结构。笔者认为，对于数学教育工作者来说，认识这个结构是有益的。

兰道（Landau）的《分析基础》（有中译本）已经出版了几十年，至今仍不失其为讲数系公理结构的一本好书。不必讳言，这本小册子是在兰道的书的深刻影响下写出的。笔者在1982年前半年曾用兰道的书作教材在北京师范大学分校讲过一遍，感觉到，它立论严格，完整，简洁。但也感觉到，作为教材，该书尚有不少在教学上不便之处。笔者于1982年后半年在北京师范大学为讲授"数系"编写了一份讲义。这本小册子就是在这份讲义的基础上加工整理出来的。

本书讲数系的次序不同于兰道的书，兰道的次序基本上按照历史上数系发展的顺序——先引入无理数，后引入正负数。本书的顺序也不同于现代一般讲数系的顺序——自然数系的后面紧跟着引入整数环。本书的顺序是：自然数——（没有正负号及0的）分数——（有正负号及0的）有理数——实数——复数。这基本上同当前我国从小学到中学学习数系的顺序一致①。笔者认为这对从理论上理解当前中小学

① 如果把0放在自然数集内（正如现代流行的作法那样），整个数系的顺序就同目前小学到中学学习的顺序完全一致。但笔者认为晚一点引入数0对于推理和行文要方便一些。

的数学教学也许较为有益一些。此外，本书还注意到数系理论的直观背景，希望能使读者感到数系的公理结构不是凭空随意想出的。同时本书又注意到数系理论和实际计算的联系，希望读者学过之后，不致感到数系理论中的数是一回事，而日常计算中的数又是另一回事，联系不到一起。不过，应该申明，本书的着眼点主要在理论，不能代替诸如“教材教法”之类的教材。

本书列有一批习题，大部分是对正文中未证定理的补证，其目的是让读者自己参加建立数系的工作，而不是完全被动地接受现成材料。

“十进小数”作为附录列在实数一章内。

作为选修课程，如果本课开设在三、四年级，那么，本书的预篇（集合）和第五章（复数）①可以不讲，有些定理的证明可以让学生自己阅读，这样，40学时左右就可以把书讲完。如果开设在低年级，就需适当增加教学时数。

限于笔者的水平，本书中错误和不当之处在所难免，笔者恳切希望得到批评和指正的意见。

蒋人璧同志对本书的编写提出了有益的建议，在此表示感谢。

黄廷阁

于北京师范大学数学系

1983年11月

---

① 关于[illegible]、[illegible]合写的《高等代数》第一章有关复数的部分[illegible]就[illegible]。

目　　录

预　篇

本篇将介绍有关集合的一些基本知识，以备引用。我们将按照“朴素的”观点来谈论集合，这就是说，集合的一些最基础的性质被认为已知，而不再深究它们根据现代集合论的哪些公理。凡读过“集合论”或“抽象代数”（“近世代数”）的读者可以不读这一篇。

§1. 集　合

在数学中，集合和集合的元素是不定义的原始概念，但我们不妨通过以下的通俗描述来理解它们：

一个集合指的是由某些确定的事物组成的一个集体，这个集体又被看作是一个单独的思维对象。这些确定的事物叫做这集合的元素。

当且仅当 x 是集合 A 的元素时，就说 A 包含 x，或说 x 属于 A，记作

$$x \in A,$$

否则说 A 不包含 x，或说 x 不属于 A，记作

$$x \notin A.$$

我们说集合 $A = B$（读作“A 等于 B”），指的是 A 和 B 是同一集合①，也就是说，它们具有相同的元素。这可表示为：

①在本书中，等式 $X = Y$ 永远表示 X 与 Y 是同一事物。

$A=B$，当且仅当对于任何的 x，

$$x\in A \Longleftrightarrow x\in B.$$

这是证明两个集合相等时所应遵循的准则。

另一方面，我们用 $A\neq B$ 来记 A，B 是不同的集合。这就是说，$A\neq B$，当且仅当"存在某个 a，$a\in A$ 但 $a\notin B$"或"存在某个 b，$b\in B$ 但 $b\notin A$"。

有时会遇到不包含任何元素的集合，这样的集合叫空集。这就是说，A 是空集，当且仅当对于任何的 x，$x\notin A$。空集是唯一的。我们用 $\varnothing$ 记这唯一的空集。

设给定两个集合 A，B。当且仅当 A 的元素都是 B 的元素，即对于任何的 x，

$$x\in A \Longrightarrow x\in B,$$

就说 A 是 B 的子集，或说 B 包括 A，记为

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A.$$

这里并不排斥 $A=B$ 的情况。把子集定义同上面两集合相等的条件结合起来，就有

$$A=B \Longleftrightarrow A\subset B 且 B\subset A.$$

当且仅当 A 是 B 的子集且 $A\neq B$ 时，就说 A 是 B 的真子集，记作

$$A\subsetneqq B.$$

空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集。

这是因为，对于任何的 x，如 $x\notin A$，将无条件地有 $x\notin\varnothing$，即

$$x\notin A \Longrightarrow x\notin\varnothing,$$

这等于说

$$x\in\varnothing \Longrightarrow x\in A.$$

如果一个集合的元素可以列举，我们可以把它的元素一一写出，并用花括号{ }括起来，以明确这集合的元素都是哪些事物。例如，{1，2，3}表示由自然数① 1，2，3组成的集合。此外，有时也采用以下"定性的"方式来表示集合。设$S(x)$是关于事物x的一个陈述语，它是这样地明确，使人们能够判断，对于哪些事物x，$S(x)$成立，对于哪些事物x，$S(x)$不成立。我们用

$$\{x|S(x)\}$$

表示使条件$S(x)$成立的一切事物x组成的集合。这就是说，等式$A=\{x|S(x)\}$指的是

$$x\in A\Longleftrightarrow S(x)\text{成立}.$$

例如，如用$\boldsymbol{R}$记一切实数组成的集合，则$\{x|x\in\boldsymbol{R}\text{且}x<1\}$就表示实数区间$(-\infty,1)$。这一集合也可写成$\{x\in\boldsymbol{R}|x<1\}$以强调它是$\boldsymbol{R}$的子集。一般，我们把$\{x|x\in A\text{且}S(x)\}$记作$\{x\in A|S(x)\}$。

设给定两个集合A，B。把一切属于A或属于B（不排斥同时属于A和B）的元素组成的集合叫做A和B的并集，记为$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{或}x\in B\}.$$

例如，设$A=\{x\in\boldsymbol{R}|0<x<2\}$，$B=\{x\in\boldsymbol{R}|1<x<3\}$，则$A\cup B=\{x\in\boldsymbol{R}|0<x<3\}$。又如，对于任何集合$A$，总有

$$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A.$$

并的运算显然满足交换律：

$$A\cup B=B\cup A.$$

---

① 为了方便，本篇在举例时，有时引用在本书后面才出现的概念，但这些例子都与本书的逻辑系统无关。

并的运算显然也满足结合律：

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C).$$

我们把等式的两端同记作$A\cup B\cup C$。

设给定两个集合A，B。把同时属于A和B的一切元素组成的集合叫做A和B的交集，记为$A\cap B$，即

$$A\cap B = \{x|x\in A\text{且}x\in B\}.$$

例如，对于上面例子中的A，B，$A\cap B = \{x\in \mathbf{R}|1<x<2\}$。又如，对于任何的集合$A$，总有

$$A\cap\varnothing = \varnothing\cap A = \varnothing.$$

交的运算显然满足交换律：

$$A\cap B = B\cap A$$

及结合律。

按定义，当且仅当A，B没有共同元素时，记$A\cap B=\varnothing$；当且仅当A，B有共同元素时，记$A\cap B\neq\varnothing$。

设给定两个集合A，B。把属于A但不属于B的一切元素组成的集合叫作A与B的差集，记为$A\setminus B$，即

$$A\setminus B = \{x|x\in A\text{且}x\notin B\}.$$

特别是，当$B\subset A$时，把$A\setminus B$叫做B的余集（相对于A）。例如，相对于$\mathbf{R}$，集合$\{x\in\mathbf{R}|x<1\}$的余集是$\{x\in\mathbf{R}|1\geqslant x\}$。

§2. 序偶·笛卡尔积·关系

设给定两个事物x，y。取x作前项，y作后项，这就形成一个序偶(x, y)。对于两个序偶(x, y)和(ξ, η)，我们说它们相等（即说它们是同一事物），指的是，前项相同，后项也相同。这就是说，

$$(x, y)=(\xi, \eta)\Longleftrightarrow x=\xi\text{且}y=\eta.$$

设给定两个集合A, B（A前B后）。任取$x\in A$，$y\in B$，就形成序偶(x, y)。这样一切可能的序偶(x, y)组成的集合叫做A与B的笛卡尔积，记为$A\times B$，即

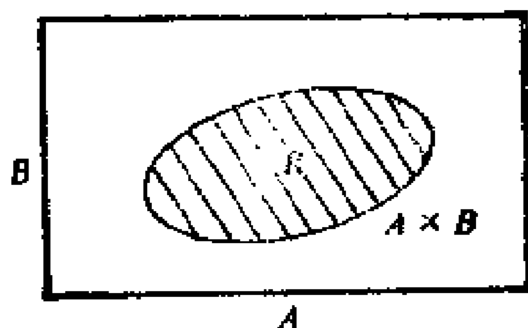
$$A\times B=\{(x, y)\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}.$$

例如，看$A=B=\mathbf{R}$的情形。这时$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}$且$y\in\mathbf{R}\}$就是数平面（记为$\mathbf{R}^2$），其中实数序偶$(x, y)$就是通常见到的数平面上点的笛卡尔坐标。这就是"笛卡尔积"一词的来源。当然，在我们的定义中，A，B不一定是同一集合。例如，设

$$A=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2=1\},\quad B=\mathbf{R}.$$

如果把$B=\mathbf{R}$看作是z-轴，那么，$A\times B$就是通过(x, y)-平面上的单位圆A且以z-轴为对称轴的圆柱面。一般来说，$A\times B$中的A，B是不能交换的。

不论在日常生活中或在数学中，我们都经常遇到"关系"这个概念，例如父子关系，同学关系，等于关系，小于关系，属于关系，函数关系等等。以下是一般的定义：



A与B的关系R的示意图

图 1

集合A与B的笛卡尔积$A\times B$的一个子集R叫做A与B的一个关系。（参看图1。）

通俗地说，对于$x\in A$，$y\in B$，如果序偶$(x, y)\in R$，就意味着x，y被关系R联系起来，如果$(x, y)\notin R$，就意味着x，y没有被关系R联系起来。例如A是三个男人组成的集

合：$A=\{X,Y,Z\}$，B是三个男孩组成的集合：$B=\{x,y,z\}$。A与B的笛卡尔积是$A\times B=\{(X,x),(X,y),(X,z),(Y,x),(Y,y),(Y,z),(Z,x),(Z,y),(Z,z)\}$。如已知男人$X$是男孩$x$与$y$的父亲，男人$Y$是男孩$z$的父亲，那么，$A\times B$的子集$R=\{(X,x),(X,y),(Y,z)\}$就确定了集合$A$，$B$间的父子关系。

设R是A与B的一个关系，通常用xRy来记$(x,y)\in R$。在上例中，可记XRx，XRy，YRz。

在许多情况中，我们考虑一个集合A与自己间的关系，就是说，考虑$R\subset A\times A$。这样的关系R简称为A中的关系。例如，实数集$\mathbf{R}$中的小于关系$<$是数平面$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$的一个子集，它的图象就是数平面中直线$x=y$上方的半平面(参看图2)。对于$(x,y)\in<$，通常记作$x<y$。

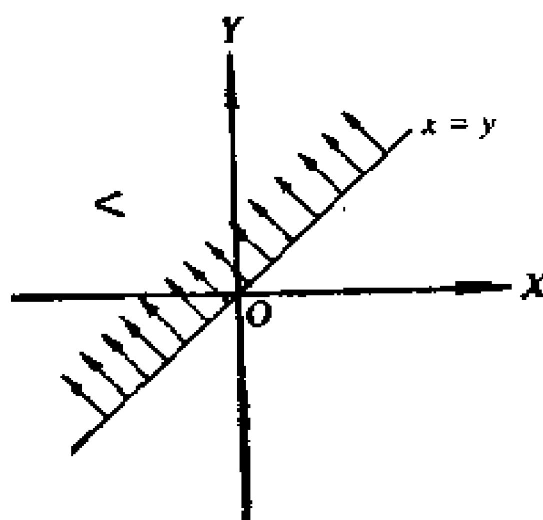


图 2

§3. 等价关系·集合的分类

本节将专门讨论一个集合中的关系的一种特殊类型，这种类型的关系对于本书的理论发展是重要的。

设R是集合A中的一个关系（即$R\subset A\times A$）。我们说R是A中一个等价关系，当且仅当，对于任何的x，y，$z\in A$：

1)（自反性）xRx，

2 （对称性）$xRy \Longrightarrow yRx$,

3）（传递性）xRy 且 $yRz \Longrightarrow xRz$。

对于等价关系 R，当且仅当 xRy（即 $(x, y) \in R$）时，说 x 等价于 y。

例如，任何集合中的等于关系 = 是个等价关系。又如，在平面几何中，在一切三角形的集合中，相似关系∽是个等价关系。再如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，小于关系＜就不是等价关系。这些都是很容易验证的。

与等价关系密切联系着的有以下的等价类概念。

设给定集合 A 及其中的一个等价关系 R。对于每个 $x \in A$，把一切与 x 等价的 $y \in A$ 集拢起来，把这样组成的集合叫做 x 的 R-等价类，记为 $[x]_R$，即

$$[x]_R = \{y \in A \mid xRy\}.$$

例如，如 R 指的是集合 A 中的等于关系，那么，对于每个 $x \in A$，与 x 等价（这里指相等）的只有它自己，所以这时 $[x]_=$ 就是单元素集 $\{x\}$。如 R 指的是一切三角形的集合中的相似关系∽，那么，对于每个三角形△，$[\triangle]_{\backsim}$ 就是一切与△相似的三角形组成的集合。

〔**定理 1**〕 设给定集合 A 及其中的等价关系 R。那么，对于任何的 $y, z \in A$,

$$y, z \text{属于同一等价类} \Longleftrightarrow yRz.$$

证 设 y, z 属于同一等价类 $[x]_R$，其中 $x \in A$。按定义，xRy 且 xRz。再按 R 的对称性，yRx。最后，按 R 的传递性，yRz。

另一方面，设 yRz。按定义，$z \in [y]_R$。但按 R 的自反性，$y \in [y]_R$。所以 y, z 属于同一等价类 $[y]_R$。 ∎

在不少场合，根据需要，我们要对一个给定的集合进行分类。

设给定集合A，并设$\mathscr{C}$是由A的非空子集组成的一个集合（集合的集合）。我们说$\mathscr{C}$是A的一个分类，当且仅当：

1) A的每一元素属于$\mathscr{C}$中某一集合，

2) $\mathscr{C}$中任何两个不同集合没有共同元素。

用通俗的话说，这指的是把A分裂成若干非空子集，既不遗漏任何元素，而且不同的子集也不互相重叠。例如，可以把自然数集$\boldsymbol{N}$分成奇数集$\boldsymbol{N}_1$和偶数集$\boldsymbol{N}_2$。这时分类就是集组$\mathscr{C}=\{\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\}$。又如，可以把实数集$\boldsymbol{R}$分成正实数集$\boldsymbol{R}^+$，负实数集$\boldsymbol{R}^-$和单元素集$\{0\}$。这时分类就是集组$\mathscr{C}=\{\boldsymbol{R}^+, \boldsymbol{R}^-, \{0\}\}$。

以下是等价关系和集合分类的重要联系：

〔**定理 2**〕 设给定集合A及其中的一个等价关系R。那么，A中一切等价类的集合

$$\mathscr{D}=\{[x]_R|x\in A\}^{①}$$

是A的一个分类。

证 1）对于任何的$x\in A$，由R的自反性，$x\in[x]_R$，故x属于一个等价类——它自己的等价类。

2）现在证明，如果两个等价类$[y]_R$与$[z]_R$有共同元素x，则它们必重合。事实上，对于任何的$u\in[y]_R$，因已假设$x\in[y]_R$，故由定理1，xRu。其次，因假设$x\in[z]_R$，故zRx。由R的传递性，zRu，即$u\in[z]_R$。这就证明了$[y]_R\subset[z]_R$。

① 这指的是对于一切$x\in A$等价类$[x]_R$组成的集合。不过，应该注意，如xRy，则$[x]_R$与$[y]_R$重合。互相重合的等价类被看成是一个（参看下面的推论）。

类似地可证$[z]_R \subset [y]_R$。最后得到$[y]_R = [z]_R$。

〔推论〕 对于等价关系R，

$$[y]_R = [z]_R \Longleftrightarrow yRz.$$

事实上，如$[y]_R = [z]_R$，则由R的自反性，y，z属于同一等价类，故由定理1，yRz。另一方面，如yRz，则$[y]_R$与$[z]_R$有共同元素z，故由定理2，$[y]_R = [z]_R$。 ∎

例如，在一切三角形的集合中，相似关系$\backsim$确定一个分类，且按定理1，在每一等价类中的三角形都相似，并且相似的三角形必属于同一等价类。又如，用$\boldsymbol{J}^+$记一切正整数的集合，并在$\boldsymbol{J}^+$中定义一个关系R：当且仅当$x-y$能被3整除时，说xRy。不难验证R是$\boldsymbol{J}^+$中的一个等价关系。R确定了$\boldsymbol{J}^+$的一个分类。

$$\mathscr{D} = \{[x]_R \mid x \in \boldsymbol{J}^+\},$$

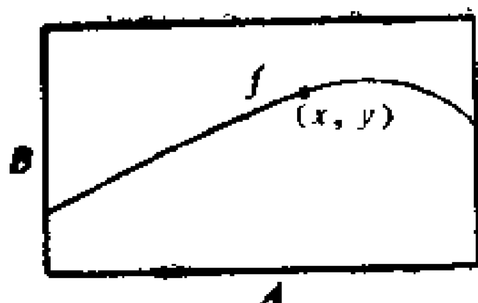
这里，例如

$$[1]_R = \{1, 4, 7, \cdots\},$$
$$[2]_R = \{2, 5, 8, \cdots\},$$
$$[3]_R = \{3, 6, 9, \cdots\},$$
$$[4]_R = [1]_R, \ [5]_R = [2]_R, \ [6]_R = [3]_R, \ \cdots.$$

§4. 映射·运算

映射（即函数）概念是数学中几乎到处遇到的概念。本节将给出映射概念的一个比较明确的定义。在§3，我们把$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A 且 y \in B\}$的一个子集叫做$A$与$B$的一个关系。这个子集的构成是完全任意的，就是说，任何由$x \in A$与$y \in B$配成的某些序偶(x, y)组成的集合都被称为A与B的关系。映射是关系的特殊类型，它要满足关于y的

单值性的要求（参看图 3）。



映射 $f: A\to B$ 的示意图

图 3

设给定集合 A，B 及 A 与 B 的一个关系 f。当且仅当 f 满足以下条件：对于每一 $x\in A$，存在恰好一个 $y\in B$，使 xfy（即 $(x,y)\in f$），说 f 是从 A 到 B 内的一个映射（函数），记为

$$f: A\to B.$$

对于这里的 x，y，我们还记 $x\overset{f}{\to}y$ 或 $y=f(x)$，并叫后者为映射 f 在 x 的值。把集合 A 叫做映射 f 的定义域。有时也说 f 是定义在 A 上的一个映射（函数）。

上面利用关系概念定义了映射，避免了在定义中使用"对应"这个不加定义的概念（过去的微积分课本中通常利用"对应"定义函数）。不过，在一般的叙述中，关于映射，使用通常使用的"对应"这个词有时是方便的。在以上定义的基础上，我们有时把一个映射 f 叫做一个单值对应，并说 $y=f(x)\in B$ 是 $x\in A$ 的对应值。

以下介绍有关映射的几个概念。

设给定 $f: A\to B$，并给定 $C\subset A$。把一切 $x\in C$ 的对应值 $f(x)\in B$ 的全体叫做在映射 f 下集合 C 的象，记为 $f(C)$，即

$$f(C)=\{f(x)\mid x\in C\}.$$

特别是，把定义域 A 的象 $f(A)$ 叫做映射 f 的值域。

例如，设 $f: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 如下定义：

$$f(x)=x^2.$$

则$f((-1, 2))=[0, 4)$，f的值域是$f(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}$。

按定义，映射$f: A\to B$永远是单值的，就是说，对于每个$x\in A$，对应值$y=f(x)$是唯一的。但是，倒过来不一定对。对于每个$y\in f(A)$，不见得只有一个$x\in A$，使$f(x)=y$。读者可以从熟知的函数中举出许多有关的反例。

当且仅当对于任何的x_1，$x_2\in A$，

$f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$（即$x_1\neq x_2\Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$）

我们说f是一个单叶映射，简称单射。

例如，在任一实数区间上定义的实值函数，如果是严格单调的，就必是单叶的。又如，设$f: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，其中当$x$是有理数时，令$f(x)=x$，当$x$是无理数时，令$f(x)=x+1$。映射$f$也是单叶的。

设有定义在集合A上的单射f。那么，不但每个$x\in A$恰好有一个对应值$y\in f(A)$，而且对于每个$y\in f(A)$，也恰好有一个$x\in A$，使$f(x)=y$。我们又称定义在A上的单射f为从A到$f(A)$的一个一一对应。

最后，考虑映射的一种特殊情况——运算。

设给定集合A。从$A\times A$到A内的映射

$$F: A\times A\to A$$

叫做集合A中的一个运算。

这就是说，对于A的任何两个元素x，y组成的序偶(x, y)，通过运算F，得到唯一的对应值$F(x, y)$，而后者仍是A的元素。例如，如$+$是自然数集$\boldsymbol{N}$中的加法运算，则$+(1,3)=4$，通常记为$1+3=4$。又如，微积分中的任何二元实值函数都是$\boldsymbol{R}$中的运算。

第一章 自然数

§1. 引 言

自然数的产生起源于人类在生产活动中计数（数一数有多少）的需要.开始只有很少几个自然数.后来随着生产力的发展和记数方法的改进，人类的文化里有了越来越多的自然数.对于这些自然数，人们还进行加法,乘法等运算.在生产力不断发展以及科学事业不断进步的同时，人们陆续引入分数，无理数，负数和复数，并按照不加证明（但行之有效）的算律对它们进行运算.直到十九世纪中期，从自然数到实数的理论基础并未被认真地考虑过（复数及其运算的定义在十九世纪三十年代由哈米尔顿（Hamilton）给出）.其后，数学严密性的需要以及数学的公理化倾向，促使人们开始认真考虑如何建立整个数系的逻辑结构.在十九世纪后半叶，经过康托尔（Cantor），狄德金德（Dedekind），魏尔史特拉斯（Weierstrass），裴阿诺（Peano）等数学家的努力，完成了建立整个数系的逻辑结构的工作.这一结构把自然数当作不定义的概念，但为它们设立一组公理，名叫裴阿诺公理（见下节）.由此出发，在整个数系的建立过程中，除引用如预篇所述的关于集合的简单知识外，任何概念都可用本结构中已知概念来定义，任何性质都可用本结构中已知性质来证明.

本书的任务就是把这个逻辑结构展示给读者.

§2. 裴阿诺公理

我们从幼年时代开始，就学习和运用自然数，并且，通过同自然数的不断接触，逐步深化了对自然数的认识。在这样的基础上，我们不妨对自然数作如下的粗略描述：

自然数是这样一些数：每个数的后面跟随着一个确定的数；从1开始，可以把它们一个跟随一个地排成一串，既不重复，也不遗漏。

这当然算不上自然数的定义。不过，它在某种程度上反映了自然数集的本质。在上个世纪末，裴阿诺总结了自然数集的根本性质，用公理的形式表达出来。这就是下面引入的裴阿诺公理。

我们把自然数集$\boldsymbol{N}$当作不定义的原始概念①，就是说，我们认为在实际生活中它是已知的。$\boldsymbol{N}$满足以下公理：

〔裴阿诺公理〕A）$1\in\boldsymbol{N}$（1也是不定义的）；

B）存在一个名叫“后继映射”的映射

$$(\quad)^+:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}\qquad((\quad)^+\text{也是不定义的})，$$

使得：

1）对于任何的$n\in\boldsymbol{N}$，$n^+\neq 1$；

2）$(\quad)^+$是单射；

3）（归纳公理）设$M\subset\boldsymbol{N}$，如果M满足以下条件：

i）$1\in M$，

---

① 在本世纪二十年代，冯•诺伊曼（Von Neumann）用某种特定的集合定义了自然数。在这样的定义之下，裴阿诺公理所列举的性质都是可以证明的。读者可以参看有关的文献。

ii) 对于任何的$n \in \boldsymbol{N}$,

$$n \in M \Rightarrow n^{+} \in M,$$

则 $M = \boldsymbol{N}$。

我们把映射 $(\ )^{+}$在n的值n^{+}叫做n的后继者。

尽管我们以后就要形式地把这组公理作为正式推理的出发点，但我们认为，暂时搁置理论的发展，讲一讲这组公理的直观意义可能对读者有益：

a) 公理A) 说的是，1是一个自然数，这说明我们所说的自然数集$\boldsymbol{N}$绝非空无一物的空集，它至少包含一个元素1。

b) 公理B) 中后继映射的存在反映在本节开始时对自然数的描述中所说的"每个数的后面跟随一个确定的数"。例如，记1的后继者为2：$1^{+} = 2$，记2的后继者为3：$2^{+} = 3$，等等。

c) 公理B)，1) 说明1不是任何自然数的后继者。连同A)，这反映在描述中所说的，当我们把自然数排成一串时，"从1开始"，以后1就不再出现。

d) 公理B)，2) 说的是，如果自然数m是自然数n的后继者，它就不能再是别的自然数的后继者。这反映了在描述中所说的，把自然数排成一串时，是"不重复"的。

e) 最后，公理B)，3) 中关于M的条件实质上是给出了对自然数进行排列的过程，它的条件i)($1 \in M$) 说明把1排进去。由它的条件ii)可知$1^{+} = 2$也被排进去($1 \in M \Rightarrow 1^{+} \in M$)，同样可知$2^{+} = 3$也被排进去 ($2 \in M \Rightarrow 2^{+} \in M$)，如此等等，"一个跟随一个地排下去。" 这条公理的结论 ($M = \boldsymbol{N}$) 说明这样排列的结果将使所有的自然数被"无遗漏"地排在M里面。

§ 3. 归纳公理与数学归纳法

裴阿诺公理列举了自然数集的根本性质。读者在初次学习这组公理时，对于其中的公理A）以及公理B）中的1），2），大抵是容易接受的；但是，对于公理 B)，3）（归纳公理)，可能觉得把它列入自然数集的根本性质是不自然的，甚至觉得没有必要。在上一节的说明e）中，我们已经看到，归纳公理说明当把自然数按照后继映射一个跟随一个地排下去时，它可以保证做到不漏掉一个。现在从反面来看这条公理对于刻画自然数集的必要性。设 L 是一切不小于1 的实数①组成的集合。在L上如下定义后继映射 $(\ )^+: L\to L$：

$$x^+=x+1.$$

不难验证集合 L 满足裴阿诺公理的A）及 B)中的1)，2)。但它不满足归纳公理。事实上，看正整数集$\mathbf{Z}^+\subset L$。显然$\mathbf{Z}^+$满足归纳公理的条件i）和ii)，但归纳公理的结论 $\mathbf{Z}^+=L$ 不成立。由此可见，如果从裴阿诺公理中抽掉归纳公理，就会出现类如L的情况，也就不足以刻画自然数集了——难道我们能把"连续不断"的L看成是自然数集或者看成是类似的集合吗？

我们再从另一角度来说明归纳公理的重要性。我们知道，数学归纳法是数学中一种重要的证明方法。假定有一个关于自然数n的陈述语 $S(n)$ $\left(例如\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$。如能证明

---

① 实数是在本书第四章才引入的。这里，为了便于说明问题，我们提前引用实数。这个例子的结果与本书的逻辑系统无关。

Ⅰ） 对于$n=1$，$S(n)$成立，

Ⅱ） 对于任何的$n\in\boldsymbol{N}$，

$$S(n)\text{成立}\Rightarrow S(n^+)\text{成立}①，$$

我们就能判断$S(n)$对于一切自然数n成立。数学归纳法的根据是什么呢？通常是这样解释的：当我们证明Ⅰ）以后，我们知道$S(1)$成立。当我们证明Ⅱ）以后，从$S(1)$成立就能推知$S(2)$成立，从$S(2)$成立就能推知$S(3)$成立，以此类推，我们就“断定”$S(n)$对于一切自然数n成立。这样的论证方式是经不起推敲的②。我们从$S(1)$成立开始，反复引用Ⅱ）往后推演，只能推断有限个步骤，而自然数是无穷无尽的。我们怎能断定$S(n)$对于一切自然数n成立呢？所谓“以此类推”不过是一种含混的说法罢了。

关于自然数，我们设立了归纳公理，数学归纳法可以从它找到依据。设M是使$S(n)$成立的一切自然数n组成的集合：

$$M=\{n\in\boldsymbol{N}\mid S(n)\}.$$

这就是说，对于任何的$n\in\boldsymbol{N}$，

$$n\in M\Longleftrightarrow S(n)\text{成立}.$$

由条件Ⅰ），$1\in M$，所以归纳公理的条件 i）成立。由条件Ⅱ），对于任何的$n\in\boldsymbol{N}$，$n\in M\Rightarrow n^+\in M$，所以归纳公理的条件ii）成立。于是，根据归纳公理，$M=\boldsymbol{N}$，这等于说，对于一切的$n\in\boldsymbol{N}$，$S(n)$成立。于是数学归纳法在归纳公理中找到根据。

---

① 后面就会看到，$n^+=n+1$。

② 当然，这样的解释[illegible]数学中是适当的并且是必要的。

§4．其它基本性质

裴阿诺公理列举了自然数集$\boldsymbol{N}$的根本性质．在本节，我们将以裴阿诺公理为根据，证明$\boldsymbol{N}$的另外两个基本性质．

〔**定理1**〕任何自然数不以自己为后继者，即，对于任何的$n\in\boldsymbol{N}$，$n^+\neq n$．

证 设M是使$n^+\neq n$的一切自然数n组成的集合：

$$M=\{n\in\boldsymbol{N}\mid n^+\neq n\}.$$

以下用归纳公理证明M与$\boldsymbol{N}$重合：

i) $n=1\in M$．这是因为，由公理B)，1)，$1^+\neq 1$．

ii) 设$n\in M$，我们证明$n^+\in M$．事实上，按题设，$n^+\neq n$，因后继映射是单射（公理B)，2)），所以$(n^+)^+\neq n^+$，可见$n^+\in M$．

根据归纳公理，$M=\boldsymbol{N}$．这就是说，对于任何的自然数n，$n^+\neq n$． ▌

〔**定理2**〕对于任何的自然数$n\neq 1$，存在唯一的自然数m，以n为后继者：$m^+=n$．

证 设

$$M=\{1\}\cup\{n\in\boldsymbol{N}\mid 存在m\in\boldsymbol{N}，使m^+=n\}.$$

我们用归纳公理证明M与$\boldsymbol{N}$重合：

i) $1\in M$．

ii) 设$n\in M$．对于n^+，可取$m=n$，则$m^+=n^+$，这就是说，n^+无条件地属于M的第二项，从而属于M．

按归纳公理，$M=\boldsymbol{N}$．于是推出，任意自然数$n\neq 1$，n就被包含于M的第二项，故存在一个自然数m，使$m^+=n$．

最后，m的唯一性可由后继映射的单叶性(公理B)，2))

推出。

我们把使 $m^+=n$ 的唯一m叫做$n\neq1$的先行者。只要自然数$n\neq1$，它就有唯一的先行者。

〔注〕由公理B），1），自然数1没有先行者。

§5．自然数的加法

在正式定义以前，让我们分析一下，为了与实际生活中对自然数加法的认识和谐一致，我们应该怎样定义这个运算。任意给定自然数n。首先，$n+1$应该是n的后继者：

$$n+1=n^+. \qquad (1)$$

其次，如用2记1的后继者，用3记2的后继者，等等，那么，$n+1^+=n+2$应该是$n+1$的后继者，$n+2^+=n+3$应该是$n+2$的后继者，等等。一般说来，对于任何的自然数m，如果已经算出$n+m$的值，那么$n+m^+$应该是$n+m$的后继者：

$$n+m^+=(n+m)^+. \qquad (2)$$

看来，用反映日常生活中想到的后继者和加法之间关系的等式(1)，(2)定义自然数的加法是适当的。问题是，满足(1)，(2)的运算是否存在？是否唯一①？以下定理保证这运算的唯一存在性。在定理中我们暂时不用符号+，而采取映射的记法来表示(1)，(2)。

〔加法存在定理〕存在唯一的映射

$$F: \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N},$$

使对于任何的n，$m\in\boldsymbol{N}$，

① 利用集合论的"递推原理"，不难验证这个运算存在且唯一，但我们不准备引用它，而直接证明运算的唯一存在性。

1) $F(n, 1)=n^{+}$.

2) $F(n, m^{+})=F(n, m)^{+}$.

证 A) 唯一性. 设$F: \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$满足定理的条件，并设$G: \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$也满足定理的条件(把$F$换成$G$). 我们证明$F$与$G$重合，即证明，对于任何的$n, m\in\boldsymbol{N}$,

$$F(n,m)=G(n,m). \qquad (3)$$

任取$n\in\boldsymbol{N}$,把它暂时固定下来. 只要证明对于任何的$m\in\boldsymbol{N}$,等式(3)成立就可以了. 事实上，设

$$M=\{m\in\boldsymbol{N}\,|\,F(n,m)=G(n,m)\}.$$

以下用归纳公理证明M与$\boldsymbol{N}$重合:

i) 由于F,G都满足1),即

$$F(n,1)=n^{+},\ G(n,1)=n^{+},$$

所以$F(n,1)=G(n,1)$, 可见$m=1\in M$.

ii) 设$m\in M$, 即

$$F(n,m)=G(n,m).$$

通过后继映射，我们有

$$F(n,m)^{+}=G(n,m)^{+}.$$

又因为对于任何的$m\in\boldsymbol{N}$, F和G都满足2), 即

$$F(n,m^{+})=F(n,m)^{+},\ G(n,m^{+})=G(n,m)^{+},$$

所以$F(n,m^{+})=G(n,m^{+})$这就推出了$m^{+}\in M$.

按归纳公理,$M=\boldsymbol{N}$. 可见对于任何的$n,m\in\boldsymbol{N}$,等式(3)成立.

B) 存在性. 现在证明满足定理条件1), 2)的映射$F: \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$的存在性. 为此,只要证明对于任何给定的$n\in\boldsymbol{N}$, 存在映射$F(n, \ ): \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$,使对于每个$m\in\boldsymbol{N}$,条件1),2)成立就可以了. 这样,就可断定,存在我们需要的$F: \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$.

设

$M=\{n\in\boldsymbol{N}\mid$存在$F(n,\ ):\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$，使

1) $F(n,1)=n^+$,

2) 对于任何的$m\in\boldsymbol{N}$，$F(n,m^+)=F(n,m)^+\}$。

以下用归纳公理证明M与$\boldsymbol{N}$重合：

i）对于$n=1$，我们定义映射$F(1,\ ):\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$如下：对于任何的$m\in\boldsymbol{N}$，指定

a) $F(1,\ m)=m^+$。

以下验证这样定义的$F(1,\ )$满足条件1)，2)。事实上，按定义a)，

$$F(1,1)=1^+,$$

故$F(1,\ )$满足条件1)。再按定义a)；

$$F(1,m^+)=(m^+)^+=F(1,m)^+,$$

故$F(1,\ )$满足条件2)。由此可见，确实存在满足条件1)，2)的映射$F(1,\ ):\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$。所以$n=1\in M$。

ii) 设$n\in M$，即已经存在满足1)，2)的映射$F(n,\ ):\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$。现在如下定义$F(n^+,\ ):\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$：对于任何的$m\in\boldsymbol{N}$，指定

b) $F(n^+,m)=F(n,m)^+$。

这就用$F(n,\ )$定义了$F(n^+,\ )$。以下验证后者也满足1)，2)（把n换成n^+）。事实上，由定义b)及等式1)，

$$F(n^+,1)=F(n,1)^+=(n^+)^+,$$

故$F(n^+,\ )$满足条件1)。其次，由定义b)及等式2)，

$$F(n^+,m^+)=F(n,m^+)^+=(F(n,m)^+)^+=F(n^+,m)^+,$$

故$F(n^+,\ )$满足条件2)。由此可见，由b)定义的$F(n^+,\ ):\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$确实满足1)，2)。这就推出$n^+\in M$。

按归纳公理，$M=\boldsymbol{N}$，从而证明了满足条件1)，2)的

映射 $F:\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ 的存在性。

〔注〕在定理的证明A）中已经肯定了满足定理条件的映射 F 的唯一性，所以在证明B）中通过等式a），b）证明存在的 F 就是这唯一的映射。由此得出结论：定理中的映射 F 具有以下性质：对于任何的 $n,m\in\boldsymbol{N}$，

a）$F(1,m)=m^+$，

b）$F(n^+,m)=F(n,m)^+$。

在存在定理被证明的基础上，我们把运算 $F:\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ 叫做 $\boldsymbol{N}$ 中的加法运算，并记 $F(n,m)=n+m$。

〔定义〕自然数集 $\boldsymbol{N}$ 中的加法 + 指的是满足以下条件的唯一运算：对于任何的 $n,m\in\boldsymbol{N}$，

1）$n+1=n^+$，　　2）$n+m^+=(n+m)^+$。

我们把 $n+m$ 叫做 n 与 m 的和。

把上面的注解也用运算 + 表示如下：

〔注〕对于任何的 $n,m\in\boldsymbol{N}$，

a）$1+m=m^+$，　　b）$n^++m=(n+m)^+$。

例如，如记 $1^+=2$，则由定义中的1），

$$1+1=2.$$

又如，再记 $2^+=3$，$3^+=4$，$4^+=5$，则陆续使用定义中的2），

$$5+4=(5+3)^+=((5+2)^+)^+=(((5+1)^+)^+)^+.$$

由定义中的1），$5+1=5^+$，于是

$$5+4=(((5^+)^+)^+)^+.$$

再记 $5^+=6$，$6^+=7$，$7^+=8$，$8^+=9$，我们有

$$(((5^+)^+)^+)^+=((6^+)^+)^+=(7^+)^+=8^+=9.$$

这就在我们的定义及记法下，证明了 $5+4=9$。

现在对定理中 F 的存在性的证明b）作些解释。读者可能

认为我们的证法太烦，不如以下的证法简单：

"任意给定$n\in \boldsymbol{N}$，把它暂时固定下来。设

$$M=\{m\in \boldsymbol{N} \mid 数F(n,m)被确定，满足条件1),2)\}。$$

现在证明$M=\boldsymbol{N}$：

i) 由1)，$F(n,1)=n^+$，故$1\in M$。

ii) 设$m\in M$，即数$F(n,m)$被确定。由2)，$F(n,m^+)=F(n,m)^+$，可见数$F(n,m^+)$被确定，故$m^+\in M$。

按归纳公理，$M=\boldsymbol{N}$。于是，对于一切$n,m\in \boldsymbol{N}$，数$F(n,m)$被确定，且1)，2)成立。这就是说，存在映射$F:\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$，满足条件1)，2)。"

这证法的错误在于，利用了条件1)，2)"证明"满足条件1)，2)的映射F存在，这当然是不行的。

现在已经有了自然数加法的明确定义，我们可以按照定义并根据裴阿诺公理——主要是归纳公理——来证明关于自然数加法的基本算律。

〔**定理 3**〕（加法交换律）对于任何的$n,m\in \boldsymbol{N}$，

$$n+m=m+n。$$

证 任取$m\in \boldsymbol{N}$，把它暂时固定下来。只要证明对于任何的$n\in \boldsymbol{N}$，定理中的等式成立就可以了。设

$$M=\{n\in \boldsymbol{N} \mid n+m=m+n\}。$$

以下用归纳公理证明M与$\boldsymbol{N}$重合：

i) 由加法定义的注a)，

$$1+m=m^+。$$

由加法定义中的1)，

$$m+1=m^+。$$

所以

$$1+m=m+1,$$
可见$n=1\in M$。

ii）设$n\in M$，即设
$$n+m=m+n.$$
则由加法定义的注 b）及定义中的2），
$$n^{+}+m=(n+m)^{+}=(m+n)^{+}=m+n^{+}.$$
这就推出$n^{+}\in M$。

按归纳公理，$M=\boldsymbol{N}$。于是证明了对于任何的$n, m\in\boldsymbol{N}$，
$$n+m=m+n$$

〔**定理 4**〕（**加法结合律**）对于任何的 $n,m,l\in\boldsymbol{N}$，
$$(n+m)+l=n+(m+l).$$

证 任取 $n,m\in\boldsymbol{N}$，把它们暂时固定下来。只要证明对于任何的$l\in\boldsymbol{N}$，定理中的等式成立就可以了。设
$$M=\{l\in\boldsymbol{N}\mid(n+m)+l=n+(m+l)\}.$$
以下用归纳公理证明M与$\boldsymbol{N}$重合：

i）对于$l=1$，由加法定义中的1）和2），
$$(n+m)+1=(n+m)^{+}=n+m^{+}=n+(m+1).$$
可见$l=1\in M$。

ii）设$l\in M$，即设
$$(n+m)+l=n+(m+l),$$
则由加法定义中的2），
$$(n+m)+l^{+}=((n+m)+l)^{+}=(n+(m+l))^{+}$$
$$=n+(m+l)^{+}=n+(m+l^{+}),$$
这就推出 $l^{+}\in M$。

按归纳公理，$M=\boldsymbol{N}$。于是证明了对于任何的$n,m,l\in\boldsymbol{N}$，
$$(n+m)+l=n+(m+l).$$ ∎

〔定理 5〕（加法消去律）对于任何的$n,m,l\in \boldsymbol{N}$，

$$n+l=m+l\Rightarrow n=m.$$

证 只要证明以下的等价命题：

$$n\neq m\Rightarrow n+l\neq m+l$$

就可以了。任取两个不相等的自然数n,m：

$$n\neq m,$$

把它们暂时固定下来。设

$$M=\{l\in \boldsymbol{N} \mid n+l\neq m+l\}.$$

以下用归纳公理证明M与$\boldsymbol{N}$重合：

i）由加法定义中的1），

$$n+1=n^+,\quad m+1=m^+.$$

因后继映射是单射（公理B），2））。故由假设$n\neq m$推出$n^+\neq m^+$，即

$$n+1\neq m+1,$$

可见 $l=1\in M$。

ii）设$l\in M$，即设

$$n+l\neq m+l.$$

由加法定义中的2），

$$n+l^+=(n+l)^+,\quad m+l^+=(m+l)^+.$$

因后继映射是单射，故由假设$n+l\neq m+l$推出
$(n+l)^+\neq(m+l)^+$，即

$$n+l^+\neq m+l^+,$$

可见 $l^+\in M$。

按归纳公理，$M=\boldsymbol{N}$。于是在$n\neq m$的假定下，对于任何的$l\in \boldsymbol{N}$，都有$n+l\neq m+l$。定理得证。 ∎

现在可以看出，加法定义中1），2）两条充分保证了

自然数加法的根本属性，正是根据这两条，连同裴阿诺公理，我们证明了自然数加法的三个基本算律。类似的评论也适用于后面的自然数乘法与顺序的定义。

习　题

1．只根据加法定义的1），2）两条以及裴阿诺公理，证明定义的注a），b）．

2．试用加法定义或定义的注验证

$3+2=5$，　　$3+3=6$，　　$3+6=9$．

§6．比较两个自然数

对于任意两个自然数n,m，如果从加法的角度来比较它们（暂时不说谁“大”，谁“小”），那么，从实际生活我们知道，或者n和m是同一自然数，或者m等于n加某一自然数，或者n等于m加某一自然数，三种情形恰好有一种成立。本节将证明这一事实。为此，先证以下引理：

〔引理〕对于任何的$n,m\in \boldsymbol{N}$，

$$n+m\neq n.$$

（根据交换律，同时有

$$m+n\neq n.）$$

证　任取$m\in \boldsymbol{N}$，把它暂时固定下来。只要证明对于任何的$n\in \boldsymbol{N}$，定理中的不等式成立就可以了。设

$$M=\{n\in \boldsymbol{N}\mid n+m\neq n\}.$$

以下用归纳公理证明M与$\boldsymbol{N}$重合：

1）由加法定义的注a），

$$1+m=m^{+}.$$

又由公理B），1），$m^+ \neq 1$，所以

$$1 + m \neq 1,$$

从而$n = 1 \in M$。

ii）设$n \in M$，即设

$$n + m \neq n.$$

于是按加法定义的注b）及后继映射的单叶性（公理B），2）），

$$n^+ + m = (n + m^+) \neq n^+,$$

这就推出$n^+ \in M$。

按归纳公理，$M = \boldsymbol{N}$。于是证明了对于任何的$n, m \in \boldsymbol{N}$，

$$n + m \neq n.$$

〔**比较定理**〕对于任何的$n, m \in \boldsymbol{N}$，以下三种情形恰好有一种成立：

1）$n = m$；

2）存在某个$j \in \boldsymbol{N}$，使$m = n + j$（由消去律，这j是唯一的）；

3）存在某个$k \in \boldsymbol{N}$，使$n = m + k$（由消去律，这k是唯一的）。

证 A）三种情形互不相容。事实上，1），2）不能同时成立，否则就与引理矛盾。1），3）也是这样。以下证明2），3）不能同时成立。如果不然，即同时存在j，$k \in \boldsymbol{N}$，使

$$m = n + j \quad \text{且} \quad n = m + k,$$

这就有

$$n = (n + j) + k = n + (j + k),$$

同样与引理矛盾。

B）三种情形至少有一成立。事实上，任取$n \in \boldsymbol{N}$，把它

暂时固定下来。设

$$M=\{m\in\boldsymbol{N}\mid 1),\ 2),\ 3)\text{ 中有一成立}\}.$$

以下用归纳公理证明M与$\boldsymbol{N}$重合：

i）对于$m=1$：

或者$n=1$，此时$n=m$，情形1）成立；

或者$n\neq1$，则由定理2可知n有先行者，即存在某个$k\in\boldsymbol{N}$，使$k^+=n$，即$n=1+k=m+k$，情形3）成立。

可见$m=1\in M$。

ii）设$m\in M$：

或者1)成立：$m=n$，此时$m^+=n^+=n+1$，于是对于m^+，情形2）成立；

或者2)成立：$m=n+j$，此时，$m^+=(n+j)^+=n+j^+$，于是对于m^+，同样情形2）成立；

或者3)成立：$n=m+k$，此时如$k=1$，则$n=m+1=m^+$，于是对于m^+，1)成立；如$k\neq1$，则k有先行者，即存在某个$l\in\boldsymbol{N}$，使$l^+=k$，从而$n=m+l^+=(m+l)^+=m^++l$，于是对于m^+，3)成立。

总之，只要$m\in M$，就能推出$m^+\in M$。

按归纳公理，$M=\boldsymbol{N}$。这就证明了对于任何的$n,m\in\boldsymbol{N}$，定理中的三种情形至少有一成立。

§7. 自然数的乘法

象§5开始时那样，我们分析一下，应该怎样定义自然数的乘法。任意给定自然数n。首先，n乘1应该等于n：

$$n\cdot1=n. \qquad 1)$$

其次，通常理解自然数的乘法就是"累加"，这样，$n\cdot2$应该

等于$n+n=n\cdot1+n$，$n\cdot3$应该等于$(n+n)+n=n\cdot2+n$，等等。一般，如果已经算出$n\cdot m$的值，那么，$n\cdot m^+$应该等于$n\cdot m+n$：

$$n\cdot m^+=n\cdot m+n. \qquad (2)$$

以下定理保证满足上述要求(1)，(2)的运算的唯一存在性：

〔乘法存在定理〕 存在唯一的映射

$$G: \mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N},$$

使对于任何的$n, m\in\mathbf{N}$，

1）$G(n,1)=n$，

2）$G(n,m^+)=G(n,m)+n$。

〔注〕 存在定理中的映射G具有以下性质：对于任何的$n, m\in\mathbf{N}$，

a）$G(1,m)=m$，

b）$G(n^+,m)=G(n,m)+m$。

请读者自己证明存在定理和它的注。

在存在定理被证明的基础上，我们把运算$G: \mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$叫做$\mathbf{N}$中的乘法运算，并记$G(n,m)=n\cdot m$。

〔定义〕 自然数集$\mathbf{N}$中的乘法·指的是满足以下条件的唯一运算：对于任何的$n, m\in\mathbf{N}$，

1）$n\cdot1=n$， 2）$n\cdot m^+=n\cdot m+n$。

这就用加法定义了乘法。我们把$n\cdot m$叫做n与m的积。

〔注〕 对于任何的$n, m\in\mathbf{N}$，

a）$1\cdot m=m$， b）$n^+\cdot m=n\cdot m+m$。

例如，按定义（参看习题2），

$$3\cdot3=3\cdot2^+=3\cdot2+3=3\cdot1^++3=(3\cdot1+3)+3$$
$$=(3+3)+3=6+3=9.$$

象通常一样，我们往往略去符号·，记$n\cdot m$为nm。

以下建立关于乘法的基本算律。

〔定理 6〕（乘法交换律）对于任何的 $n, m \in \boldsymbol{N}$，

$$nm = mn.$$

证明留给读者。

〔定理 7〕（乘加分配律）对于任何的 $n, m, l \in \boldsymbol{N}$，

$$n(m+l) = nm + nl.$$

（按交换律，同时有

$$(m+l)n = mn + ln.)$$

证 任取 $n, m \in \boldsymbol{N}$，把它们暂时固定下来，只要证明对于任何的 $l \in \boldsymbol{N}$，定理中的等式成立就可以了。设

$$M = \{l \in \boldsymbol{N} \mid n(m+l) = nm + nl\}.$$

以下用归纳公理证明 M 与 $\boldsymbol{N}$ 重合：

i）对于 $l=1$，根据加法定义中的1）和乘法定义中的2）和1），

$$n(m+1) = nm^{+} = nm + n = nm + n \cdot 1,$$

可见 $l = 1 \in M$。

ii）设 $l \in M$，即设

$$n(m+l) = nm + nl.$$

由此等式并根据加法定义中的2）和乘法定义中的2）以及加法结合律，我们有

$$\begin{aligned} n(m+l^{+}) &= n(m+l)^{+} = n(m+l) + n \\ &= (nm+nl) + n = nm + (nl+n) \\ &= nm + nl^{+}, \end{aligned}$$

于是推出 $l^{+} \in M$。

按归纳公理，$M = \boldsymbol{N}$。这就证明了对于任何的 $n, m, l \in \boldsymbol{N}$，

$$n(m+l) = nm + nl.$$

〔**定理 8**〕（乘法结合律）对于任何的 $n,m,l\in \boldsymbol{N}$，

$$(nm)l=n(ml).$$

证 任取 $n,m\in \boldsymbol{N}$，把它们暂时固定下来。只要证明对于任何的$l\in \boldsymbol{N}$，定理中的等式成立就可以了。设

$$M=\{l\in \boldsymbol{N}\mid (nm)l=n(ml)\},$$

以下用归纳公理证明M与$\boldsymbol{N}$重合：

i）对于$l=1$，由乘法定义中的1），

$$(nm)\cdot 1=nm=n(m\cdot 1),$$

可见$l=1\in M$。

ii）设$l\in M$，即设

$$(nm)l=n(ml),$$

则由乘法定义中的2），

$$(nm)l^{+}=(nm)l+nm=n(ml)+nm.$$

根据乘加分配律，最后的和数等于$n(ml+m)$，其中第二个乘数，按乘法定义中的2），等于ml^{+}。所以

$$(nm)l^{+}=n(ml^{+}).$$

于是推出$l^{+}\in M$。

按归纳公理，$M=\boldsymbol{N}$，这就证明了对于任何的$n,m,l\in \boldsymbol{N}$，

$$(nm)l=n(ml).$$

〔**定理 9**〕（乘法消去律）对于任何的$n,m,l\in \boldsymbol{N}$，

$$nl=ml\Rightarrow n=m.$$

证 假定$n\neq m$，则根据上节的比较定理：

或者存在$j\in \boldsymbol{N}$，使$m=n+j$，此时按分配律，$ml=nl+jl$，于是由§5的引理，$ml\neq nl$，这就与假设矛盾。

或者存在$k\in \boldsymbol{N}$，使$n=m+k$，此时按同样的理由可得与假设矛盾的结果$nl\neq ml$。

习　题

3．证明乘法存在定理及其注．

4．根据乘法定义中的 1)，2)，加法定义中的1)，2)，以及已证的加法算律，利用归纳公理证明乘法定义的注a)，b)．

5．用定义证明$4\cdot 2=8$．

6．证明定理6．

§8．自然数的顺序

在本节，我们将定义自然数集的顺序，即定义自然数集$\boldsymbol{N}$中的$<$关系．在日常生活中，对于自然数，通常认为“越加越大”．例如$5=3+2$，我们就认为“5大于3”或“3小于5”．这样看来，利用自然数的加法来定义自然数的顺序就是非常自然的了．

〔**定义**〕对于任意的$n,m\in\boldsymbol{N}$，当且仅当存在$j\in\boldsymbol{N}$，使$m=n+j$（根据消去律，这j是唯一的），我们说n小于m，记作$n<m$①，也说m大于n，记作$m>n$．

定义了自然数的顺序之后，跟着来的一个根本性的问题是：任何两个自然数是否定能比较大小？以下是它的答案：

〔**定理10**〕（三歧性）对于任何的$n,m\in\boldsymbol{N}$，以下三种情形恰好有一种成立．

$$n=m,\quad n<m,\quad m<n.$$

证　由§6的比较定理，我们知道，以下三种情形恰好有一种成立：

1）$n=m$．

① 这就是说，$\boldsymbol{N}$中的$<$关系是$\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$的如下子集：
$<=\{(n,m)\in N\times N\mid$存在$j\in N$，使$m=n+j\}$．

2）存在$j\in \boldsymbol{N}$，使$m=n+j$，这就是$n<m$.

3）存在$k\in \boldsymbol{N}$，使$n=m+k$，这就是$m<n$.

在某些场合，我们写$n\leqq m(n\geqq m)$.这指的是，$n<m(n>m)$或$n=m$这两种可能之一成立，也就是说，n不大于(不小于)m。在以后各章中有时也使用相应的记号，不再另作解释。

<关系的另一根本性质是下述的传递性：

〔**定理11**〕（传递性）对于任何的$n,m,l\in \boldsymbol{N}$，

$n<m$且$m<l\Rightarrow n<l$。

证 由题设，存在$j,k\in \boldsymbol{N}$，使$m=n+j$，且$l=m+k$。于是$l=(n+j)+k=n+(j+k)$，

所以 $n<l$。

以下是<关系与加法运算相联系的性质。

〔**定理12**〕（加法的单调性）对于任何的$n,m,l\in \boldsymbol{N}$，

$n<m\Rightarrow n+l<m+l$①。

证 由题设，存在$j\in \boldsymbol{N}$，使

$$m=n+j.$$

于是按结合律与交换律，

$m+l=(n+j)+l=n+(j+l)=n+(l+j)=(n+l)+j$.所以$n+l<m+l$.

上面，我们对定理采用了“加法的单调性”这个名称。这指的是，在定理中，如果固定加数l，把加法运算看成从$\boldsymbol{N}$到$\boldsymbol{N}$内的映射，那么，这映射就是单调的(且是严格递增的)。

〔**推论1**〕对于任何的$n,m,l,k\in \boldsymbol{N}$.

$n<m$且$l<k\Rightarrow n+l<m+k$.

① 由交换律，同时有$n<m\Rightarrow l+n<l+m$. 后面（包括后面各章），我们将不再重复类似的与交换律有关的注解.

为了证明，只要接连应用定理12并应用<关系的传递性就可以了。

利用三歧性，可从定理12推出它的逆命题：

〔**推论 2**〕对于任何的$n,m,l\in \boldsymbol{N}$，

$$n+l<m+l\Rightarrow n<m.$$

证 用反证法。如果不是$n<m$，则由三歧性，

或者$n=m$，这时$n+l=m+l$是同一数（加法的唯一性），就与题设矛盾。

或者$m<n$，这时由定理12，$m+l<n+l$，这同样与题设矛盾。

下面是<关系与乘法运算相联系的性质，我们把它们的证明留给读者。

〔**定理13**〕（乘法的单调性）对于任何的$n,m,l\in \boldsymbol{N}$.

$$n<m\Rightarrow nl<ml.$$

〔**推论 1**〕对于任何的$n,m,l,k\in \boldsymbol{N}$，

$$n<m \text{ 且 } l<k\Rightarrow nl<mk.$$

〔**推论 2**〕对于任何的$n,m,l\in \boldsymbol{N}$，

$$nl<ml\Rightarrow n<m.$$

习　题

7．证明定理13.

8．证明定理13的推论1．

9．证明定理13的推论2.

§9．有限制的减法

按上节的定义，当且仅当$m=n+j$时，说$n<m$。现在，我们就把自然数j叫做m减n的差：

〔**定义**〕我们把§8中关于$n<m$的定义($m=n+j$)中唯一的自然数j叫做在$n<m$的限制下m减n的差，记作

$$j=m-n.$$

例如，$5=3+2$。一方面说$3<5$，另一方面也说$2=5-3$。

应该指出，这里关于有限制的减法的定义在某种程度上说，是无意味的，它只引入新的名称和新的记号，并未引入任何新的概念。不过，为了同后面扩充了的数系中的减法作对比，我们还是把它作为定义列出来。

§10. 最小数原理

在谈论本题之前，我们先建立自然数集的两个基本性质：

〔**定理14**〕自然数集$\boldsymbol{N}$没有最大数，即对于任何的$n\in\boldsymbol{N}$，总存在$m\in\boldsymbol{N}$，使$n<m$。

证 对于任何给定的$n\in\boldsymbol{N}$，不妨取$m=n^{+}$，于是根据加法定义及顺序定义，

$$m=n+1>n. \quad ▮$$

与此相反，我们有

〔**定理15**〕自然数集$\boldsymbol{N}$有最小数1，即对于任何的$n\in\boldsymbol{N}$，$1\leqq n$。

证 如$n=1$，则定理结论中的等号成立。如$n\neq1$，则按定理2，n有先行者，即存在$m\in\boldsymbol{N}$，使$m^{+}=n$。按加法定义的注a)，$n=1+m$。再按顺序定义，$1<n$。 ▮

为了证明本节的主要定理，我们再证明，如果自然数$n<m$，那么m至少等于$n+1$：

〔**定理16**〕对于任何的$n,m\in\boldsymbol{N}$，

$$n<m\Rightarrow n+1\leqq m.$$

证　因$n<m$，故存在$j\in \boldsymbol{N}$，使$m=n+j$。但由定理15，$1\leqq j$，所以根据加法的单调性，

$$n+1\leqq m.$$

由定理16不难推出自然数集区别于后面的分数集，有理数集以至实数集的重要特征：任何两个相邻的自然数之间不**存在任何**另外的自然数。这就是：

〔**推论**〕对于任何的$n\in \boldsymbol{N}$，不存在$m\in \boldsymbol{N}$，使

$$n<m<n+1.$$

证明留给读者。

以下是本节的主要定理，它说的是，不但自然数集本身有最小数1（定理15），而且它的任何非空子集都有最小数①。这在直观上是显然的，但在逻辑上不是自明的。这个性质，例如，对于分数集（见第二章），或负整数集（见第三章）来说就不成立。

〔**定理17**〕（最小数原理）设$A\subseteq \boldsymbol{N}$且$A\neq\varnothing$。那么$A$必有最小数$m_0$。即存在$m_0\in A$，使对于任何的$n\in A$，$m_0\leqq n$。

证　A）设M是由不大于每个$n\in A$的自然数组成的集合：

$$M=\{m\in \boldsymbol{N}\mid m\leqq 每个 n\in A\}.$$

我们证明M不能与$\boldsymbol{N}$重合。事实上，因$A\neq\varnothing$，可取$n\in A$，则$n+1$大于n，可见存在自然数$n+1\notin M$。

B）现在证明存在$m_0\in M$，使$m_0+1\notin M$。事实上，由定理15，1不大于每个自然数，因此无例外地，$1\leqq$每个$n\in M$，可见$1\in M$。其次，如果不存在符合条件的$m_0\in M$，即对于任何的$m\in M$，总有$m+1\in M$，则由归纳公理可知$M=\boldsymbol{N}$。这就同A）中的结果矛盾。

① 这性质就是通常所说的"良序性"。

C) 最后证明m_0就是A的最小数。事实上，由于$m_0\in M$，故按M的定义，$m_0\leqq$每个$n\in A$。所以只要证明$m_0\in A$就可以了。事实上，如$m_0\notin A$，则在上面的不等式中就排除了等号：$m_0<$每个$n\in A$。由定理16，我们有$m_0+1\leqq$每个$n\in A$。故按M的定义，$m_0+1\in M$，这就同B)中关于m_0的定义矛盾。

我们指出，任何集合的最小数如果存在，必是唯一的。

习　　题

10. 证明定理16的推论。

11. 用最小数原理证明第二归纳原理①：

设$M\subset\boldsymbol{N}$。如对于任何的$n\in\boldsymbol{N}$：

小于n的任何自然数都属于$M\Rightarrow n\in M$。②

则$M=\boldsymbol{N}$。

思　　考　　题③

以下给出与裴阿诺公理等价的一组公理。为了叙述方便，我们把裴阿诺公理叫做公理一，并引入以下的公理二：

（公理二）a) $\boldsymbol{N}\neq\varnothing$。

b)（全序公理）存在$\boldsymbol{N}$中一个关系$<$（不定义），使得对于任何的n，m，$l\in\boldsymbol{N}$：

1)（三歧性）以下三种情形恰好有一种成立。

$n=m$，　$n<m$，　$m<n$。

2)（传递性）$n<m$且$m<l\Rightarrow n<l$。

c)（最小数公理）$\boldsymbol{N}$的任何非空子集L必有最小数，即存在$l_0\in L$，使得

---

①我们也称归纳公理为第一归纳原理。

② 由于不存在小于1的自然数，所以"小于1的任何自然数都属于M"总是对的，于是$1\in M$，没有必要把$1\in M$列入条件。

③本题受到蒋硕民教授的启发。

对于任何的 $l\in L$，$l_0\leq l$。

d)（最大数公理）N的任何非空子集K如果有上界，即存在 $n_0\in N$，使得对于任何的 $k\in K$，$k\leq n_0$，则K有最大数，即存在 $k_0\in K$，使得对于任何的 $k\in K$，$k\leq k_0$。

e) N 没有最大数。

〔注〕由<关系的三歧性，不难验证，c）中L的最小数 l_0 和d）中K的最大数k_0都是唯一的。

由公理二出发，请读者适当定义数1及后继映射 $(\ )^+: N\to N$，并证明公理一全部成立。

另一方面，从公理一出发，我们已经通过定义加法而定义了N中的<关系。并且，由公理一的A）直接推出公理二的a），而公理二的b），c），e）也已被证明。请读者证明公理二的d）。

总之，两组公理是等价的。

第二章 分 数①

§1. 引言·自然数序偶

在第一章我们已经看到，在自然数之间可以无阻碍地进行加法运算和乘法运算。在数的实际应用中，不但需要对于数作加法和乘法，而且往往需要考虑它们的逆运算，即减法和除法。在这样的需要面前，自然数就显得不敷应用了。例如，在自然数集的范围内，2除以3是没有意义的，因为不存在任何自然数与3之积等于2（习题12）。在本章我们将引入新的数——分数来解决除法问题（在下一章再解决减法问题）。引入的方式将不是直接用自然数定义分数，而是通过自然数序偶这个过渡性概念来进行定义的。

本章里，如无另外的规定，我们将用 j，k，l，m，n，这五个英文字母来记自然数，一般不再声明。

在小学算术里，"分数"指的是形如"$\frac{n_1}{n_2}$"的数。在本书中，上下两数之间的一横"—"将被专用作除法的记号，因此不能随便在两个自然数之间使用这个记号。不过，给出了"$\frac{n_1}{n_2}$"实际等于给出了一对有顺序的自然数 n_1，n_2。这样，我们就直截了当地谈论自然数的序偶（n_1，n_2）好了。在以下几节，我们将定义自然数序偶的对等，顺序，加法和乘法。

① 本章所说的分数指的是不带正负号也不是零的分数，基本上相当于小学算术中的分数。

在谈论序偶(n_1, n_2)时，我们心目中实际想的就是小学算术中的“$\frac{n_1}{n_2}$”。我们的定义要同小学算术中“分数”的运算法则一致。不过，应该注意，从逻辑系统上说，现在的序偶还不是我们要说的分数，后者只是到本章的§6方始引入的。

为了叙述方便，我们把序偶(n_1, n_2)中的自然数n_1叫做它的子项，把其中的自然数n_2叫做它的母项。一切自然序偶的集合$\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$将被简记为$\boldsymbol{P}$。

习　题

12. 试证不存在自然数n，m，使

i) $3n=2$, ii) $2m=5$.

§2. 自然数序偶的对等

在小学算术里，人们认为“$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$”。这个判断的理由是：把二者的“分母”变成一样，得到“$\frac{2\cdot 6}{3\cdot 6}$”与“$\frac{4\cdot 3}{6\cdot 3}$”，由于改变后的“分子”也相等：$2\cdot 6=4\cdot 3$，所以认为“$\frac{2}{3}$与$\frac{4}{6}$相等”。在我们这里$(2, 3)$与$(4, 6)$是不同的序偶，不能说它们相等。我们说它们对等。一般，有以下定义：

〔**定义**〕当且仅当$n_1m_2=m_1n_2$时，说序偶(n_1, n_2)对等于(m_1, m_2)，记作

$$(n_1, n_2)\backsim(m_1, m_2). ①$$

这里是用第二章中已定义的自然数的乘法来定义自然数

① 这就是说，

$\backsim=\{((n_1, n_2), (m_1, m_2))\in \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{P} \mid n_1m_2=m_1n_2\}.$

序偶的对等。

〔**注 1**〕 相等的序偶必是对等的。

事实上，所谓两个序偶 (n_1, n_2) 和 (m_1, m_2) 相等，指的是 $n_1 = m_1$ 且 $n_2 = m_2$。由此立即推出 $n_1m_2 = m_1n_2$。 ∎

注 1 说明对等是相等的一种推广。

〔**注 2**〕 $(n_1, n_2) \backsim (mn_1, mn_2)$。

这是极易验证的。

结合下面定理 1 中关于 $\backsim$ 的对称性，注 2 说的是对于子项和母项，乘以或消去同一乘数，得到的自然数序偶与原来的序偶保持对等（不一定相等）。

〔**定理 1**〕 对等关系 $\backsim$ 是 $\boldsymbol{P}$ 中的等价关系，即对于任何的 (n_1, n_2)，(m_1, m_2)，$(l_1, l_2) \in \boldsymbol{P}$，

1） （自反性） $(n_1, n_2) \backsim (n_1, n_2)$，

2） （对称性） $(n_1, n_2) \backsim (m_1, m_2) \Rightarrow (m_1, m_2) \backsim (n_1, n_2)$，

3） （传递性） $(n_1, n_2) \backsim (m_1, m_2)$ 且 $(m_1, m_2) \backsim (l_1, l_2) \Rightarrow (n_1, n_2) \backsim (l_1, l_2)$。

证 1） 即注 1。

2） $n_1m_2 = m_1n_2 \Rightarrow m_1n_2 = n_1m_2$。

3） 由题设，

$$n_1m_2 = m_1n_2, \qquad m_1l_2 = l_1m_2.$$

由此得到

$$(n_1m_2)(m_1l_2) = (m_1n_2)(l_1m_2).$$

利用自然数乘法的结合律和交换律，可把这等式写成

$$(n_1l_2)(m_1m_2) = (l_1n_2)(m_1m_2).$$

根据自然数乘法的消去律，得到

$$n_1 l_2 = l_1 n_2,$$

即

$$(n_1,\ n_2) \backsim (l_1,\ l_2).$$

§3. 自然数序偶的顺序

在小学算术里，人们认为"$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$"。这个判断的理由是，把二者的"分母"变成一样，得到"$\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}$"与"$\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}$"，由于改变后的"分子" $1\cdot 3<2\cdot 2$，所以认为"$\frac{1}{2}$小于$\frac{2}{3}$"。现在按照这样的原则来引入自然数序偶的顺序的一般定义：

〔**定义**〕 当且仅当$n_1 m_2<m_1 n_2$时，我们说序偶$(n_1,\ n_2)$小于$(m_1,\ m_2)$，并记$(n_1,\ n_2)<_P(m_1,\ m_2)$①，也说$(m_1,\ m_2)$大于$(n_1,\ n_2)$，并记$(m_1,\ m_2)>_P(n_1,\ n_2)$。

例如，$(1,\ 2)<_P(2,\ 3)$。

这里是用$\boldsymbol{N}$中的乘法和$<$关系定义了$\boldsymbol{P}$中的$<_P$关系。以后，在不致引起混淆的情况下，我们略去$<_P$（或$>_P$）中的标记$\boldsymbol{P}$，简写作$<$（或$>$）。当然，应该记住，略去标记$\boldsymbol{P}$以后的$<$所表示的概念$<_P$，是决不同于原来意义的概念$<$的。

〔**注**〕 $(n_1,\ n_2)<(m_1,\ m_2)$且$(n_1',\ n_2')\backsim(n_1,\ n_2)$且$(m_1',\ m_2')\backsim(m_1,\ m_2)\Rightarrow(n_1',\ n_2')<(m_1',\ m_2')$。

先证以下较简情况：

$(n_1,\ n_2)<(m_1,\ m_2)$且$(n_1',\ n_2')\backsim(n_1,\ n_2)\Rightarrow(n_1',$

① 这就是说，

$<_P=\{((n_1,\ n_2),\ (m_1,\ m_2))\in \boldsymbol{P}\times \boldsymbol{P}\mid n_1 m_2<m_1 n_2\}$.

$n_2')<(m_1, m_2)$。事实上，由题设，

$$n_1m_2<m_1n_2 \text{ 且 } n_1'n_2=n_1n_2'.$$

按自然数乘法的单调性，我们有

$$(n_1m_2)(n_1'n_2)<(m_1n_2)(n_1n_2').$$

由自然数乘法的结合律和交换律，可得

$$(n_1'm_2)(n_1n_2)<(m_1n_2')(n_1n_2).$$

根据第一章，定理13的推论 2，我们得到

$$n_1'm_2<m_1n_2',$$

即

$$(n_1', n_2')<(m_1, m_2).$$

类似地可证：

$(n_1, n_2)<(m_1, m_2)$且$(m_1', m_2')\backsim(m_1, m_2)\Rightarrow(n_1, n_2)<(m_1', m_2')$。

把以上两种情况结合起来，就得到注解中的论断。∎

这个注解说明，在自然数序偶的不等式中，不论左端用对等的序偶代替，或者右端用对等的序偶代替，或者两端分别用对等的序偶代替，不等式仍保持正确。

下面是$<_P$关系的两个基本性质：

〔**定理 2**〕（三歧性）对于任何的(n_1, n_2)，$(m_1, m_2)\in \boldsymbol{P}$，以下三种情形恰好有一种成立：

$(n_1, n_2)\backsim(m_1, m_2)$，$(n_1, n_2)<(m_1, m_2)$，$(m_1, m_2)<(n_1, n_2)$。

证 由自然数集的顺序的三歧性可知，对于两个自然数n_1m_2和m_1n_2来说，以下三种情形恰好有一种成立。

$$n_1m_2=m_1n_2,\quad n_1m_2<m_1n_2,\quad m_1n_2<n_1m_2.$$

这就是定理中所说的三种情形。∎

〔**定理 3**〕（传递性）

$(n_1, n_2) < (m_1, m_2)$ 且 $(m_1, m_2) < (l_1, l_2) \Rightarrow (n_1, n_2) < (l_1, l_2)$。

证明留给读者。

习　题

13. 证明定理 3.

§4. 自然数序偶的加法

在小学算术里，作“分数”加法时，人们先把两个“分数”的“分母”变成一样，然后把改变后的“分子”相加。例如“$\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{1\cdot 6+5\cdot 2}{2\cdot 6}$”。现在按照这样的原则定义自然数序偶的加法：

〔**定义**〕我们把序偶 $(n_1m_2+m_1n_2, n_2m_2)$ 叫做序偶 (n_1, n_2) 与 (m_1, m_2) 之和，记作

$$(n_1, n_2) +_P (m_1, m_2) = (n_1m_2+m_1n_2, n_2m_2).$$

例如

$$(1, 2) +_P (5, 6) = (1\cdot 6+5\cdot 2, 2\cdot 6) = (16, 12) \backsim (4, 3).$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去 $+_P$ 中的标记 $\boldsymbol{P}$，简写作 $+$。

〔**注 1**〕$(n_1', n_2') \backsim (n_1, n_2)$ 且 $(m_1', m_2') \backsim (m_1, m_2)$ $\Rightarrow (n_1', n_2') + (m_1', m_2') \backsim (n_1, n_2) + (m_1, m_2)$.

---

① 在第一章我们曾通过从 1 开始陆续取后继者的过程定义了从 2 到 9 这几个自然数。今后在例子中将引用更多的自然数，它们都是通过继续上述过程而得出，我们认为已知，不再叙述它们的定义。

证明留给读者。在证明时可先证只有一个加项被对等的序偶代替的情况。

这个注解说明，在自然数序偶之和中，不论一个加项被对等的序偶代替，或者两个加项分别被对等的序偶代替，得到的和与原来的和保持对等。

〔注 2〕 在自然数序偶的加法中，如果两个序偶的母项已经相同，把子项相加就可以了，这指的是：

$(n, l)+(m, l) \backsim (n+m, l)$ （不一定相等）。

事实上，根据自然数序偶加法的定义，并根据自然数的分配律以及上面§2的注2，我们有

$$(n, l)+(m, l)=(nl+ml, ll)=(l(n+m), ll)$$
$$\backsim (n+m, l).$$

以下三个基本算律留给读者证明：

〔**定理 4**〕 （交换律）

$$(n_1, n_2)+(m_1, m_2)=(m_1, m_2)+(n_1, n_2).$$

〔**定理 5**〕 （结合律）

$$((n_1, n_2)+(m_1, m_2))+(l_1, l_2)=(n_1, n_2)+((m_1, m_2)+(l_1, l_2)).$$

〔**定理 6**〕 （消去律）①

$$(n_1, n_2)+(l_1, l_2) \backsim (m_1, m_2)+(l_1, l_2) \Rightarrow (n_1, n_2) \backsim (m_1, m_2).$$

以下是加法与顺序相联系的性质：

〔**定理 7**〕 （加法的单调性）

$$(n_1, n_2)<(m_1, m_2) \Rightarrow (n_1, n_2)+(l_1, l_2)<(m_1, m_2)+(l_1, l_2).$$

① 注意，这里说的是对等式的消去律，不只是等式的消去律。

证 记

$$(j_1,\ j_2)=(n_1,\ n_2)+(l_1,\ l_2),$$
$$(k_1,\ k_2)=(m_1,\ m_2)+(l_1,\ l_2),$$

我们将证明前者小于后者。按定义，

$$j_1=n_1l_2+l_1n_2,\quad j_2=n_2l_2,$$
$$k_1=m_1l_2+l_1m_2,\quad k_2=m_2l_2.$$

于是根据自然数的有关算律，我们有

$$j_1k_2=(n_1m_2)(l_2l_2)+(n_2m_2)(l_1l_2),$$
$$k_1j_2=(m_1n_2)(l_2l_2)+(n_2m_2)(l_1l_2).$$

现在比较自然数j_1k_2和k_1j_2。由题设，

$$n_1m_2<m_1n_2.$$

于是根据自然数乘法的单调性，我们有

$$(n_1m_2)(l_2l_2)<(m_1n_2)(l_2l_2),$$

再根据自然数加法的单调性，就有

$$j_1k_2<k_1j_2.$$

这就证明了

$$(j_1,\ j_2)<(k_1,\ k_2).$$

以下两个推论留给读者证明：

〔**推论 1**〕 $(n_1,\ n_2)<(m_1,\ m_2)$且$(l_1,\ l_2)<(k_1,\ k_2)$
$\Rightarrow(n_1,\ n_2)+(l_1,\ l_2)<(m_1,\ m_2)+(k_1,\ k_2)$.

〔**推论 2**〕 $(n_1,\ n_2)+(l_1,\ l_2)<(m_1,\ m_2)+(l_1,\ l_2)$
$\Rightarrow(n_1,\ n_2)<(m_1,\ m_2)$.

习 题

14. 证明§4推论1.

15. 证明定理4.

16．证明定理5．

17．证明定理6．

18．证明定理7的推论1．

19．证明定理7的推论2．

§5．自然数序偶的乘法

在小学算术里，作"分数"乘法时，人们把两个"分数"的"分子"，"分母"分别相乘。例如"$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{1}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 1}=\frac{8}{3}$"。现在按照这样的原则来定义自然数序偶的乘法：

〔**定义**〕我们把序偶$(n_1m_1,\ n_2m_2)$叫做序偶$(n_1,\ n_2)$与$(m_1,\ m_2)$的积，记作

$$(n_1,\ n_2)\cdot_p(m_1,\ m_2)=(n_1m_1,\ n_2m_2).$$

例如，$(2,\ 3)\cdot_p(4,\ 1)=(8,\ 3)$。

在不致引起混淆的情况下，我们略去$\cdot_p$中的标记p，简写作·。有时，象通常那样，把·也略去。

〔**注**〕$(n_1',\ n_2')\backsim(n_1,\ n_2)$且$(m_1',m_2')\backsim(m_1,\ m_2)$

$$\Rightarrow(n_1',\ n_2')(m_1',\ m_2')\backsim(n_1,\ n_2)(m_1,\ m_2).$$

证明留给读者。

这个注解说明，在自然数序偶的积中，不论一个乘项被对等的序偶代替，或者两个乘项分别被对等的序偶代替，所得之积与原来的积保持对等。

以下是有关自然数序偶乘法的基本算律：

〔**定理8**〕（交换律）

$$(n_1,\ n_2)(m_1,\ m_2)\backsim(m_1,\ m_2)(n_1,\ n_2).$$

证明留给读者。

〔定理 9〕（结合律）

$$((n_1,n_2)(m_1,m_2))(l_1,l_2)=(n_1,n_2)((m_1,m_2)(l_1,l_2)).$$

证明也留给读者。

〔定理10〕（分配律）

$$(n_1, n_2)((m_1, m_2)+(l_1, l_2))\backsim(n_1, n_2)(m_1, m_2)$$
$$+(n_1, n_2)(l_1, l_2).\text{①}$$

证 根据自然数序偶的加法和乘法定义以及自然数的分配律，我们有

$$\begin{aligned}&(n_1, n_2)((m_1, m_2)+(l_1, l_2))\\ =&(n_1, n_2)(m_1l_2+l_1m_2, m_2l_2)\\ =&(n_1(m_1l_2+l_1m_2), n_2(m_2l_2))\\ =&(n_1(m_1l_2)+n_1(l_1m_2), n_2(m_2l_2))\end{aligned}$$

按§4，注2，最后一个序偶对等于

$$\begin{aligned}&(n_1(m_1l_2), n_2(m_2l_2))+(n_1(l_1m_2), n_2(m_2l_2))\\ =&((n_1m_1)l_2, (n_2m_2)l_2)+((n_1l_1)m_2, (n_2l_2)m_2).\end{aligned}$$

按§2，注2及§4，注1，最后的和对等于

$$\begin{aligned}&(n_1m_1, n_2m_2)+(n_1l_1, n_2l_2)\\ =&(n_1, n_2)(m_1, m_2)+(n_1, n_2)(l_1, l_2).\end{aligned}$$

这就证明了定理中的公式。

〔定理11〕（消去律）

$$(n_1, n_2)(l_1, l_2)\backsim(m_1, m_2)(l_1, l_2)$$
$$\Rightarrow(n_1,n_2)\backsim(m_1, m_2).$$

证明留给读者。

以下是乘法与顺序相联系的性质，其证明也留给读者。

① 注意，与交换律和结合律不一样，这里只能证明它们等价，两边不一定是相同的序偶。

〔**定理12**〕（乘法的单调性）

$$(n_1, n_2)<(m_1, m_2)$$
$$\Rightarrow (n_1, n_2)(l_1, l_2)<(m_1, m_2)(l_1, l_2)$$

〔**推论 1**〕 $(n_1, n_2)<(m_1, m_2)$ 且 $(l_1, l_2)<(k_1, k_2)$
$$\Rightarrow (n_1, n_2)(l_1, l_2)<(m_1, m_2)(k_1, k_2).$$

〔**推论 2**〕 $(n_1, n_2)(l_1, l_2)<(m_1, m_2)(l_1, l_2)$
$$\Rightarrow (n_1, n_2)<(m_1, m_2).$$

习　题

20．证明§5的注．

21．证明定理8．

22．证明定理9．

23．证明定理11．

24．证明定理12．

25．证明定理12的推论1．

26．证明定理12的推论2．

§6．分　数

在上面几节，我们比照小学算术中关于“分数”的相等和小于的判断法则以及加法和乘法的运算法则定义了自然数序偶的对等、小于、加法和乘法，并证明了通常的算律．如果我们马虎一些，象小学算术中所作的那样，把对等的自然数序偶看作是同一物，那么就把每个自然数序偶叫做一个分数好了．但是按照本书的性质，我们不这样作．因为，不同的序偶，例如（2，3）与（4，6），尽管对等，到底不是同一序偶．我们宁愿多费一道手续，采取把自然数序偶集$\boldsymbol{P}$分成等价类的办法来引入分数．

定理1告诉我们，对等关系$\backsim$是$\boldsymbol{P}$中的一个等价关系，因此（参看预篇，§3的定理2和1），如用$[(n_1, n_2)]_\backsim$记一切与(n_1, n_2)对等的序偶的集合（这集合叫做(n_1, n_2)的$\backsim$－等价类），则

$$\mathscr{D}=\{[(n_1, n_2)]_\backsim \mid (n_1, n_2)\in \boldsymbol{P}\}$$

是$\boldsymbol{P}$的一个不重不漏的分类，其中每一等价类的任何两个序偶对等，而且任何两个对等的序偶属于同一等价类。例如，

$[(2, 3)]_\backsim=\{(2, 3), (4, 6), (6, 9), \cdots\}$，

$[(1, 1)]_\backsim=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \cdots\}$，

$[(2, 1)]_\backsim=\{(2, 1), (4, 2), (6, 3), \cdots\}$

都是这样的等价类。

〔**定义**〕由对等关系$\backsim$决定的$\boldsymbol{P}$中的每个$\backsim$－等价类$[(n_1, n_2)]_\backsim$叫做一个分数，序偶(n_1, n_2)叫做这分数的一个代表。

例如，上面举出的集合都是分数。

我们用$\boldsymbol{F}$记一切分数组成的集合。

为了简单，我们略去标记$\backsim$，只用$[(n_1, n_2)]$记以(n_1, n_2)为代表的分数。

显然，与序偶(n_1, n_2)对等的任何序偶都可取作分数$[(n_1, n_2)]$的代表。例如

$$[(2, 3)]=[(4, 6)]=[(6, 9)]=\cdots.$$

在本章，我们有时也用x, y, z, u, v这五个英文字母来记分数，这就是说，$x=[(n_1, n_2)]$，当且仅当$(n_1, n_2)\in x$。

图4给出了分数的形成过程的示意图。图中每个格子点表示一个自然数序偶。自坐标原点向任一格子点(n_1, n_2)

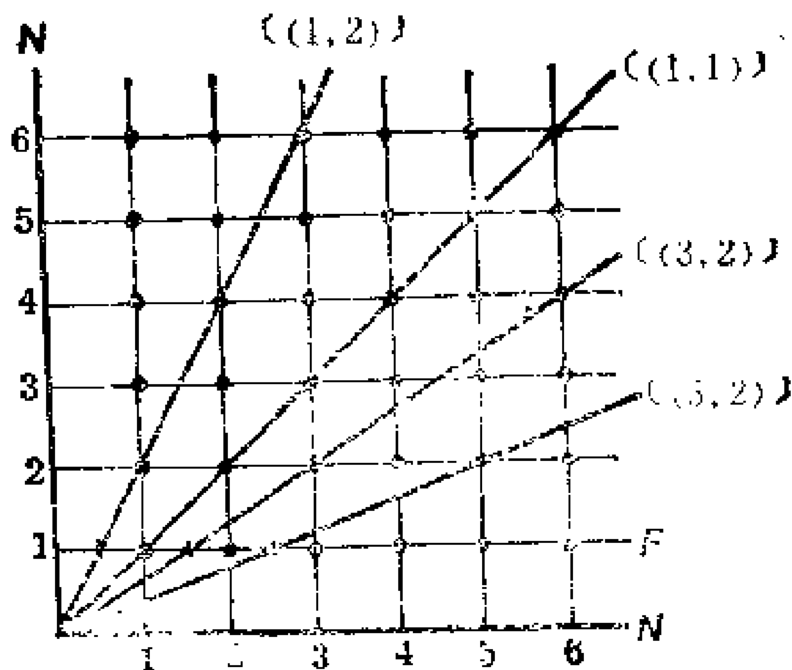


图 4

引出射线，这射线上的一串格子点组成的集合就表示以(n_1, n_2)为代表的分数$[(n_1, n_2)]$。为了使分数的图象单一化，可用向(n_1, n_2)引出的射线与高度为1的横线的交点表示分数$[(n_1, n_2)]$。一切这样的交点组成的点集叫做分数轴。

§7．分数的顺序

怎样比较两个分数的大小？一个很自然的想法是通过比较代表（这在§3已有定义）来比较分数。这里首要的问题是，这样的比较依赖不依赖于代表的选取？就是说，设$(n_1, n_2)\in x$，$(m_1, m_2)\in y$，并假定$(n_1, n_2)<(m_1, m_2)$，那么，如果分数x，y各换一个代表（或其中之一换了代表）：$(n_1', n_2')\in x$，$(m_1', m_2')\in y$，是否仍保持$(n_1', n_2')<(m_1', m_2')$？这个问题早已解决。按§3的注，我们知道：

由于$(n_1', n_2') \backsim (n_1, n_2)$，$(m_1', m_2') \backsim (m_1, m_2)$，所以由$(n_1, n_2) < (m_1, m_2)$必能推出$(n_1', n_2') < (m_1', m_2')$。可见通过比较代表来比较分数是不依赖于代表的选取的。

〔**定义**〕 对于分数x和y，任取$(n_1, n_2) \in x$，$(m_1, m_2) \in y$。当且仅当$(n_1, n_2) <_P (m_1, m_2)$时，我们说$x$小于$y$，记作$x <_F y$，也说$y$大于$x$，记作$y >_F x$。

例如，因$(3, 2) <_P (4, 2)$，故分数

$$[(3, 2)] <_F [(4, 2)] = [(2, 1)]。$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去$<_F$或$>_F$中的标记F。

以下是$<_F$关系的基本性质：

〔**定理 2′**〕 （三歧性）对于任意的$x, y \in F$，以下三种情形恰好有一种成立：

$$x = y, \quad x < y, \quad y < x。$$

证 任取$(n_1, n_2) \in x$，$(m_1, m_2) \in y$。由$<_P$关系的三歧性，以下三种情形恰好有一种成立：

$$(n_1, n_2) \backsim (m_1, m_2), \quad (n_1, n_2) < (m_1, m_2),$$
$$(m_1, m_2) < (n_1, n_2)。$$

这分别是定理中的三种情形。

〔**定理 3′**〕 （传递性）

$$x < y \text{且} y < z \Rightarrow x < z。$$

证明留给读者。

下面是与顺序有关的其他性质。

首先，我们知道（第一章，定理14），自然数集N没有最大数。现在，分数集F具有同样性质：

〔**定理13**〕 对于任何的$x \in F$，总存在$y \in F$，使$x < y$。

证 任取$(n_1, n_2)\in x$，可取$y=[(n_1+1, n_2)]$。由于

$$(n_1, n_2)<(n_1+1, n_2),$$

所以

$$x<y.$$

其次，我们知道，自然数集$\boldsymbol{N}$有最小数1（第一章，定理15）。但是，分数集$\boldsymbol{F}$却与之相反，它没有最小数。这就是

〔**定理14**〕 对于任何的$x\in\boldsymbol{F}$，总存在$y\in\boldsymbol{F}$，使$y<x$。

证明留给读者。

最后，我们知道，任何相邻两个自然数之间不存在另外的自然数（第一章，定理16的推论）。但是，分数集却具有完全不同的性质：

〔**定理15**〕（稠密性）对于任何的x，$y\in\boldsymbol{F}$，如$x<y$，则存在$z\in\boldsymbol{F}$，使$x<z<y$。

证 设$(n_1, n_2)\in x$，$(m_1, m_2)\in y$，并设

$$z=[(n_1m_2+m_1n_2,\ n_2m_2+n_2m_2)].$$

我们证明$x<z$。这只要证明

$$(n_1, n_2)<(n_1m_2+m_1n_2,\ n_2m_2+n_2m_2) \tag{1}$$

就可以了。事实上，

$$n_1(n_2m_2+n_2m_2)=n_1(n_2m_2)+n_2(n_1m_2),$$

$$(n_1m_2+m_1n_2)n_2=n_1(n_2m_2)+n_2(m_1n_2).$$

按题设$x<y$，即

$$n_1m_2<m_1n_2.$$

由此甚易推出

$$n_1(n_2m_2+n_2m_2)<(n_1m_2+m_1n_2)n_2.$$

可见不等式(1)成立，故$x<z$。类似地可证$z<y$。

习　题

27．证明定理3'．

28．证明定理14．

§8．分数的加法

我们将用代表的加法来定义分数的加法。首先要解决的是，这样作依赖不依赖于代表的选取？这个问题早已解决。按§4的注1，如(n_1, n_2)与(n_1', n_2')都是分数x的代表，且(m_1, m_2)与(m_1', m_2')都是分数y的代表，就是说，如果

$$(n_1', n_2') \backsim (n_1, n_2),\ (m_1', m_2') \backsim (m_1, m_2),$$

那么，

$$(n_1', n_2') + (m_1', m_2') \backsim (n_1, n_2) + (m_1, m_2).$$

可见对于分数x，y的每一个，不论选取哪个自然数序偶作代表，两个代表之和总属于同一分数。

〔**定义**〕对于任何的分数x和y，任取$(n_1, n_2) \in x$，$(m_1, m_2) \in y$。我们把序偶$(n_1, n_2) +_p (m_1, m_2)$（此序偶已在§4被定义）所代表的分数叫做$x$与$y$的和，记作

$$x +_F y = [(n_1, n_2) +_p (m_1, m_2)].$$

例如，

$$[(1, 2)] +_F [(5, 6)] = [(16, 12)] = [(4, 3)].$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去$+_F$中的标记F。

下面是分数加法的基本算律：

〔**定理4'**〕（交换律）$x + y = y + x$。

证　任取$(n_1, n_2) \in x$，$(m_1, m_2) \in y$。根据分数加法的定义和自然数序偶加法的交换律，

$x+y=[(n_1, n_2)+(m_1, m_2)]=[(m_1, m_2)+(n_1, n_2)]$
$=y+x$。

另外两个基本算律的证明留给读者。

〔定理 5′〕 （结合律）$(x+y)+z=x+(y+z)$。

〔定理 6′〕 （消去律）$x+z=y+z \Rightarrow x=y$。

下面是加法与顺序相联系的性质，证明也留给读者。

〔定理 7′〕 （加法的单调性）$x<y \Rightarrow x+z<y+z$。

〔推论 1〕 $x<y$ 且 $z<u \Rightarrow x+z<y+u$。

〔推论 2〕 $x+z<y+z \Rightarrow x<y$。

习　题

29．证明定理5′．

30．证明定理6′．

31．证明定理 7′．

32．证明定理7′的推论 1．

33．证明定理7′的推论 2．

§9．有限制的减法

在讨论本题以前，我们先看有关加法的一个简单性质。由自然数顺序的定义，我们知道，对于任何两个自然数 n，j 来说，$n<n+j$。在分数集 $\boldsymbol{F}$ 中，这个“越加越大”的性质仍旧保留下来：

〔引理 1〕 对于任何的 x，$y \in \boldsymbol{F}$，

$x<x+y$。

为了证明，只要比较两边的代表就可以了。请读者自己完成。

在第一章，§9，我们曾定义了在$n<m$的限制下m减n的差$j=m-n$，其中j是唯一存在的使等式$m=n+j$成立的自然数。分数集$\boldsymbol{F}$中的情况与之类似。

〔**引理 2**〕设$y<x$，则方程

$$y+u=x$$

有唯一解u。并且，当$x\leqq y$时，方程无解。

证 A）解的唯一性。设分数u，v都是方程的解，则

$$y+u=x=y+v.$$

根据加法消去律，我们有$u=v$。

B）解的存在性。任取$(n_1, n_2)\in x$，$(m_1, m_2)\in y$。因$y<x$，故$(m_1, m_2)<(n_1, n_2)$，即

$$m_1n_2<n_1m_2.$$

这样，自然数n_1m_2减m_1n_2的差$n_1m_2-m_1n_2$是存在的。现在，考虑序偶$(n_1m_2-m_1n_2, n_2m_2)$，看它与(m_1, m_2)之和。由§2，注2及§4，注2，

$$\begin{aligned}&(m_1, m_2)+(n_1m_2-m_1n_2, n_2m_2)\\ \backsim&(m_1n_2, n_2m_2)+(n_1m_2-m_1n_2, n_2m_2)\\ \backsim&(m_1n_2+(n_1m_2-m_1n_2), n_2m_2).\end{aligned}$$

按照有限制的自然数之差的定义，最后序偶的子项等于n_1m_2，故此序偶等于(n_1m_2, n_2m_2)，再由§2，注2，它又对等于(n_1, n_2)，于是

$$(m_1, m_2)+(n_1m_2-m_1n_2, n_2m_2)\backsim(n_1, n_2).$$

取$u=[(n_1m_2-m_1n_2, n_2m_2)]$，则

$$y+u=x.$$

C）$x\leqq y$的情形。如此时方程有解u，则

$$x+u\leqq y+u=x,$$

就与引理 1 矛盾。

〔**定义**〕 设 $y<_F x$。我们把方程 $y+_F u=x$ 的唯一解 u 叫做在限制 $y<_F x$ 下 x 减 y 的差，记作 $u=x-_F y$：

$$y+_F(x-_F y)=x.$$

〔**注**〕 由引理2的证明可知，如 $y<x$，且 $x=[(n_1, n_2)]$，$y=[(m_1, m_2)]$，则

$$x-_F y=[(n_1m_2-m_1n_2, n_2m_2)].$$

例如，$[(1, 2)]<[(2, 3)]$。我们有

$$[(2, 3)]-_F[(1, 2)]=[(2\cdot2-1\cdot3, 3\cdot2)]$$
$$=[(1, 6)].$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去 $-_F$ 中的标记 F。

习 题

34. 证明§ 9 的引理 1.

35. 设 $y<x$. 试证

$$x-y<x.$$

36. 设 $z<y$. 试证

$$x+(y-z)=(x+y)-z$$

37. 设 $z<y<x$. 试证

$$x-(y-z)=(x-y)+z.$$

38. 设 $y+z<x$. 试证

$$x-(y+z)=(x-y)-z.$$

§10. 分数的乘法

设给定分数 x, y. 如 (n_1, n_2), (n_1', n_2') 都是 x 的代表，(m_1, m_2), (m_1', m_2') 都是 y 的代表，即

$$(n_1', n_2')\backsim(n_1, n_2), (m_1', m_2')\backsim(m_1, m_2),$$

则按§5的注，

$$(n_1', n_2')(m_1', m_2') \backsim (n_1, n_2)(m_1, m_2).$$

这样，以下定义是合理的：

〔**定义**〕对于分数 x, y，任取 $(n_1, n_2) \in x$，$(m_1, m_2) \in y$。我们把序偶 $(n_1, n_2) \cdot_P (m_1, m_2)$ 所代表的分数叫做 x 与 y 的积，记作

$$x \cdot_F y = [(n_1, n_2) \cdot_P (m_1, m_2)].$$

例如，$[(2,3)] \cdot_F [(5,4)] = [(10,12)] = [(5,6)]$。

在不致引起混淆的情况下，我们略去 $\cdot_F$ 中的标记 $\boldsymbol{F}$，有时连 $\cdot$ 也略去。

以下算律的证明一律留给读者。

〔**定理 8′**〕（交换律）$xy = yx$。

〔**定理 9′**〕（结合律）$(xy)z = x(yz)$。

〔**定理10′**〕（分配律）$x(y+z) = xy + xz$。

〔**定理11′**〕（消去律）$xz = yz \Rightarrow x = y$。

〔**定理12′**〕（乘法的单调性）$x < y \Rightarrow xz < yz$。

〔**推论 1**〕$x < y$ 且 $z < u \Rightarrow xz < yu$。

〔**推论 2**〕$xz < yz \Rightarrow x < y$。

习　题

39. 证明定理8′.
40. 证明定理9′.
41. 证明定理10′.
42. 证明定理11′.
43. 证明定理12′.
44. 证明定理12′的推论1.
45. 证明定理12′的推论2.
46. 设 $y>z$，试证 $x(y-z)=xy-xz$.

§11. 分数的除法

在§1，我们已经提出，引入分数的基本目的之一是解决乘法的逆运算——除法的施行问题。现在，我们已通过自然数序偶引入了分数，定义了分数的乘法并证明了乘法的基本算律。除法问题的解决已经到了成熟阶段。现在证明以下的基本定理：

〔**除法存在定理**〕对于任何的x，$y\in \boldsymbol{F}$，方程

$$yu=x$$

有唯一解u。

证 A）唯一性。设u，v都是方程的解，即

$$yu=x=yv,$$

则由乘法消去律，可知$u=v$。

B）存在性。设$x=[(n_1, n_2)]$，$y=[(m_1, m_2)]$。取$u=[(n_1m_2, m_1n_2)]$，则

$$(m_1, m_2)(n_1m_2, m_1n_2)=(n_1(m_1m_2), n_2(m_1m_2))$$
$$\sim(n_1, n_2).$$

故

$$yu=x. \qquad \blacksquare$$

〔**定义**〕对于任何的x，$y\in \boldsymbol{F}$，我们把方程$y\cdot_F u=x$的唯一解u叫做x除以y的商，记作$u=\frac{x}{y}_F$：

$$y\cdot_F\left(\frac{x}{y}_F\right)=x.$$

〔**注**〕由存在定理的证明可知，如$x=[(n_1, n_2)]$，$y=[(m_1, m_2)]$，则

$$\frac{x}{y}_F=[(n_1m_2,\ m_1n_2)].$$

例如，

$$\frac{[(2,\ 3)]}{[(1,\ 2)]}_F=[(4,\ 3)].$$

除法是第一次出现的，所以在$-_F$中略去标记$_F$是不会引起混淆的。

习　　题

设x，y，z，u是任何分数，试证：

47. $\frac{x}{y}=\frac{z}{u}\Leftrightarrow xu=zy$（请比较自然数序偶对等的定义）．

48. $\frac{x}{y}<\frac{z}{u}\Leftrightarrow xu<zy$（请比较自然数序偶顺序的定义）．

49. $\frac{x}{y}+\frac{z}{u}=\frac{xu+zy}{yu}$（请比较自然数序偶加法的定义）．

50. $\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{u}=\frac{xz}{yu}$（请比较自然数序偶乘法的定义）．

51. $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{u}}=\frac{xu}{yz}$.

52. $\frac{xz}{yz}=\frac{x}{y}$．

53. $\frac{x}{z}+\frac{y}{z}=\frac{x+y}{z}$.

§12．分数1·倒数

为了书写方便，现在约定，用1来记分数$[(1,\ 1)]$．读者应从上下文来区分自然数1和分数1．

分数1是分数集$\boldsymbol{F}$的乘法恒等元：

〔定理16〕 对于任何的$x \in \boldsymbol{F}$，$x \cdot 1 = x$。

证 设$x = [(n_1, n_2)]$，则

$$x \cdot 1 = [(n_1, n_2)] \cdot [(1, 1)] = [(n_1, n_2) \cdot (1, 1)]$$
$$= [(n_1, n_2)] = x.$$

〔定义〕 我们把分数1除以x的商$\frac{1}{x}$叫做分数x的倒数：

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

〔注〕 有了倒数概念，就可以把分数的除法化为乘法：

$$\frac{y}{x} = y \cdot \frac{1}{x}.$$

这是极易验证的。

习　　题

设x，y是任何分数，试证：

54. $\frac{x}{1} = x$.

55. $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.

56. $\frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x}$.

57. $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$.

58. $x < y \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

§13. 整数·自然数集嵌入分数集

在第一章，我们研究了自然数集$\boldsymbol{N}$，在其中加法和乘法到处可行。在本章，我们引入了分数集$\boldsymbol{F}$，在其中不但加法

和乘法，而且除法到处可行。我们本来希望$\boldsymbol{F}$是$\boldsymbol{N}$的扩充，即$\boldsymbol{N}$是$\boldsymbol{F}$的子集。但是，一个分数x指的是$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$中的一个等价类$[(n_1,n_2)]$，它是以自然数序偶为元素的一个集合。因此，严格说来，单个的自然数不是分数，自然数集$\boldsymbol{N}$不是分数集$\boldsymbol{F}$的子集。在本节我们将采用一种处理方法，使得在某种意义下，可以把$\boldsymbol{F}$看成是$\boldsymbol{N}$的一种扩充。

现在看一种特殊类型的分数：

〔定义〕 可用形如$(n,1)$的序偶作代表的分数叫做整数。①

例如，分数

$$[(3,1)]=[(6,2)]=[(9,3)]=\cdots$$
$$=\{(3,1),(6,2),(9,3),\cdots\}$$

是一个整数。

我们用$\boldsymbol{W}$来记一切整数组成的集合。当然，$\boldsymbol{W}$是$\boldsymbol{F}$的一个子集。下面将看到，在某种意义下，自然数集$\boldsymbol{N}$和整数集$\boldsymbol{W}$可以看成是"一样的"。为了实现这一看法，我们构造一个从$\boldsymbol{N}$到$\boldsymbol{F}$内的映射，使对于每个$n\in\boldsymbol{N}$，对应值是以$(n,1)$为代表的整数。

〔定理17_1〕 设$E:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{F}$如下定义：

$$E(n)=[(n,1)]$$

则E是单射，且$E(\boldsymbol{N})=\boldsymbol{W}$。

证 如$E(n)=E(m)$，即$[(n,1)]=[(m,1)]$，则$(n,1)\backsim(m,1)$，即$n\cdot1=m\cdot1$，故$n=m$，所以E是单射。其次，对于任何的$y\in E(\boldsymbol{N})$，存在某个$n\in\boldsymbol{N}$，使$y=E(n)=[(n,1)]$，故

① 这里说的是不带正负号也不是零的整数。

$y \in \boldsymbol{W}$；另一方面，对于任何的$y \in \boldsymbol{W}$，存在某个$n \in \boldsymbol{N}$，使$y = [(n, 1)] = E(n)$，故$y \in E(\boldsymbol{N})$。可见$E(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{W}$。 ▮

定理17_1说明，映射E是从$\boldsymbol{N}$到$\boldsymbol{W}$的一个一一对应。我们可以把二者看成拥有"一样多"的元素。

〔**定理** 17_2〕 $n < m \Longleftrightarrow E(n) <_F E(m)$，即$[(n, 1)] <_F [(m, 1)]$。

证 $[(n,1)] <_F [(m,1)] \Longleftrightarrow (n,1) <_F (m,1)$

$$\Longleftrightarrow n \cdot 1 < m \cdot 1 \Longleftrightarrow n < m.$$

定理17_2说明，如果在$\boldsymbol{N}$里一个自然数小于另外一个自然数，那么在$\boldsymbol{W}$里，对应的整数仍是前者小于后者，并且倒过来也对。这样，对于小于关系来说，我们可以把$\boldsymbol{N}$同$\boldsymbol{W}$看成"一样的"。

〔**定理**17_3〕 $E(n+m) = E(n) +_F E(m)$，即$[(n+m,1)] = [(n,1)] +_F [(m,1)]$。

证 按§4的注2，

$$(n+m, 1) \backsim (n, 1) +_F (m, 1).$$

故根据分数加法的定义，

$$[(n+m,1)] = [(n,1) +_F (m,1)] = [(n,1)] +_F [(m, 1)].$$

定理17_3说明，在$\boldsymbol{N}$里两个自然数之和在$\boldsymbol{W}$里对应的是两个对应的整数之和。由于E是单射，所以倒过来也对。这样，对于加法来说，我们可以把$\boldsymbol{N}$同$\boldsymbol{W}$看成是"一样的"。

〔**定理**17_4〕 $E(n \cdot m) = E(n) \cdot_F E(m)$，即

$$[(n \cdot m, 1)] = [(n,1)] \cdot_F [(m,1)].$$

证明留给读者。

定理17_4说明，在$\boldsymbol{N}$里两个自然数之积在$\boldsymbol{W}$里对应的是两个对应的整数之积。由于E是单射，所以倒过来也对。这样，

对于乘法来说，我们可以把$\boldsymbol{N}$同$\boldsymbol{W}$看成是“一样的”。

把定理17_{1-4}综合起来看，从所含元素的“多少”、从顺序，加法和乘法的一致性来说，自然数集$\boldsymbol{N}$同整数集$\boldsymbol{W}$都可被看成是“一样的”。用数学的术语说，这就是：按照定理17_{1-4}的意义：

在映射E下，关于$<$与$<_F$，$+$与$+_F$，$\cdot$与$\cdot_F$，自然数集$\boldsymbol{N}$与整数集$\boldsymbol{W}\subset\boldsymbol{F}$同构。或说，关于$<$与$<_F$，$+$与$+_F$，$\cdot$与$\cdot_F$，$\boldsymbol{N}$被$E$同构地嵌入$\boldsymbol{F}$。

正是在同构嵌入的意义下，我们把分数集$\boldsymbol{F}$看成是自然数集$\boldsymbol{N}$的一种扩充。

习　　题

59．证明定理17_4。

60．设E是§13中给出的映射．试证，对于任何的自然数$m<n$，$E(n-m)=E(n)-_F E(m)$，即

$$[(n-m,\ 1)]=[(n,\ 1)]-_F[(m,\ 1)].$$

§14．整数集代替自然数集

我们在第一章曾建立了自然数集$\boldsymbol{N}$的一系列基本性质。与$\boldsymbol{N}$同构的整数集$\boldsymbol{W}$是否仍保留这一切性质呢？当然，关于加法和乘法的基本算律以及关于顺序的三歧性，传递性等等，已在分数集$\boldsymbol{F}$里证明。整数是特殊类型的分数，它们必然具有这些性质。不过，自然数集$\boldsymbol{N}$还有一些独特的性质，如归纳公理，最小数原理等等。整数集$\boldsymbol{W}$是否也保留这些性质？

我们知道，第一章中关于自然数$\boldsymbol{N}$的所有性质都是从皮阿诺公理以及加法，乘法和顺序的定义出发推导出来的。因此，如能证明整数集$\boldsymbol{W}$也满足这组公理和这些定义，那么，

就可断定$\boldsymbol{W}$具有第一章中关于自然数集$\boldsymbol{N}$的所有性质。虽然这样作显得多余一些，但我们认为，这样作可以使我们更加认清$\boldsymbol{N}$与$\boldsymbol{W}$的一致性。

先看裴阿诺公理。在这组公理中出现自然数1和后继映射$(\ )^+: \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$。在$\boldsymbol{W}$中应该用什么概念代替这两个概念呢？由于

$$E(1)=[(1,1)]①,$$

可以想到应该用整数$[(1,1)]$代替自然数1。另外，

$$E(n)=[(n,1)] \text{ 而} E(n^+)=[(n^+,1)].$$

可见，要想后继者仍对应后继者，就应让$[(n^+,1)]$去充当$[(n,1)]$在$\boldsymbol{W}$中的后继者。我们有以下定理：

〔**定理18**〕 在$\boldsymbol{W}$中，用$[(1,1)]$代替$\boldsymbol{N}$中的1，并如下定义后继映射$(\ )^{+w}: \boldsymbol{W}\to\boldsymbol{W}$：

$$[(n,1)]^{+w}=[(n^+,1)]$$

（叫做$[(n,1)]$的后继者），则$\boldsymbol{W}$满足$\boldsymbol{N}$的裴阿诺公理。

证 A) $[(1,1)]\in\boldsymbol{W}$。

B) 1) 对于任何的$[(n,1)]\in\boldsymbol{W}$，$[(n,1)]^{+w}\neq[(1,1)]$。

事实上，因E是单射，故由$n^+\neq1$可知$E(n^+)\neq E(1)$，即$[(n,1)]^{+w}=[(n^+,1)]\neq[(1,1)]$。

2) $(\ )^{+w}$是单射。

事实上，设$[(n,1)]^{+w}=[(m,1)]^{+w}$，即设$[(n^+,1)]=[(m^+,1)]$或$E(n^+)=E(m^+)$。因$E$是单射，故$n^+=m^+$。又因$(\ )^+$是单射，故$n=m$，从而$[(n,1)]=[(m,1)]$。

---

① 为了区别，我们暂时不管§12中用1记分数〔(1，1)〕的约定，1仍只表示一个自然数。

3）$\boldsymbol{W}$满足归纳公理。

事实上，设$L\subset\boldsymbol{W}$，并设

i）$[(1,1)]\in L$；

ii）对于任何的$[(n,1)]\in\boldsymbol{W}$①，

$$[(n,1)]\in L\Rightarrow[(n,1)]^{+_W}\in L.$$

以下证明$L=\boldsymbol{W}$。事实上，设

$$M=\{n\in\boldsymbol{N}\mid[(n,1)]\in L\}.$$

首先，由假设i)，$1\in M$。其次，设$n\in M$，即$[(n,1)]\in L$，则由假设ii)，$[(n^+,1)]=[(n,1)]^{+_W}\in L$，故$n^+\in M$。按自然数集的归纳公理，$M=\boldsymbol{N}$。这样，对于任何的$[(n,1)]\in\boldsymbol{W}$，即对于任何的$n\in\boldsymbol{N}$，我们有$[(n,1)]\in L$。可见$L=\boldsymbol{W}$。

现在看自然数的加法，乘法和顺序的定义：

〔定理19〕 整数的加法、乘法和顺序分别满足自然数的加法，乘法和顺序的定义，即对于任何的$[(n,1)]$，$[(m,1)]\in\boldsymbol{W}$，

A）1）$[(n,1)]+_F[(1,1)]=[(n,1)]^{+_W}$，

2）$[(n,1)]+_F[(m,1)]^{+_W}=([(n,1)]+_F[(m,1)])^{+_W}$。

B）1）$[(n,1)]\cdot_F[(1,1)]=[(n,1)]$。

2）$[(n,1)]\cdot_F[(m,1)]^{+_W}$

$=[(n,1)]\cdot_F[(m,1)]+_F[(n,1)]$。

C）$[(n,1)]<_F[(m,1)]\Longleftrightarrow$存在某个$[(i,1)]\in\boldsymbol{W}$，使

$[(m,1)]=[(n,1)]+_F[(i,1)]$。

证明留给读者。

在上节，我们已经看到自然数集$\boldsymbol{N}$与整数集$\boldsymbol{W}$关于顺序加法和乘法是同构的。现在，根据定理18和19，又可断定，

① 由定理17₁，这等于说，"对于任何的$n\in\boldsymbol{N}$。"

$\boldsymbol{W}$具备第一章中$\boldsymbol{N}$的一切性质。这样，作为分数集$\boldsymbol{F}$的子集的$\boldsymbol{W}$就可代替自然数集$\boldsymbol{N}$，而在新的数系$\boldsymbol{F}$的内部继续起着$\boldsymbol{N}$的作用。在这样的了解下，我们可以简化整数的记法，并约定：如无特殊声明，今后将用n来记整数$[(n,1)]$。

例如，用1来记整数$[(1,1)]$①，用2来记整数$[(2,1)]$。读者不必担心这样作会引起混淆，因为，除有时还要联系自然数作些议论外，在后面数系的发展中，每个自然数将被对应的整数代替，一般不再提自然数了。

在整数的这样记法下，我们还可把一般分数的记法同传统的记法一致起来。至今为止，作为自然数序偶集$\boldsymbol{P}$中的等价类，一个分数被记作$[(n_1,n_2)]$，由§11的⑤，我们有

$$\frac{[(n_1,1)]}{[(n_2,1)]}=[(n_1\cdot 1,n_2\cdot 1)]=[(n_1,n_2)]\ .$$

这说明，任一分数可表示为两个整数之商。用现在的记法，可写

$$\frac{n_1}{n_2}=[(n_1,n_2)].$$

例如，

$$\frac{2}{3}=[(2,3)]=\{(2,3),(4,6),(6,9),\cdots\}.$$

这就是说，$\frac{2}{3}$表示以（2,3）为代表的分数。但应注意，这里除号上下的2，3分别表示与自然数2，3对应的整数，$\frac{2}{3}$表示整数2除以整数3的商。

另外，我们还有：

序偶$(n_1,n_2)\backsim(m_1,m_2)\iff$分数$\frac{n_1}{n_2}=\frac{m_1}{m_2}$。

---

① 注同§12规定的记法一致。

这是因为，右边指的是 $[(n_1,n_2)]=[(m_1,m_2)]$

例如，因序偶 $(2,3)\backsim(4,6)\backsim(6,9)\backsim\cdots$，所以分数 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\cdots$。

习　　题

61．证明定理19．

62．试证，对于任何分数x，$x+x=2x$．

§15．在实际计算中分数的比较和运算

我们在§§3,4,5用自然数的顺序，加法和乘法定义了自然数序偶的顺序、加法和乘法；然后在§§7，8，10用代表(自然数序偶)的顺序、加法和乘法分别定义了分数的顺序、加法和乘法．这样作是为了理论的严密性．如果在分数的具体计算中，都按定义来进行，那么，至少在记号上显得太麻烦了．在上节，我们给予整数（从而给予分数）以新的，但与传统一致的记法，在具体计算时，就可按传统的方法进行，不必直接按照定义了．现以加法为例．例如，已知自然数3与5之和为自然数8，所以，根据$\boldsymbol{N}$与$\boldsymbol{W}$关于加法的同构性，整数3与5之和就是整数8．又如，求分数$\frac{1}{2}$与$\frac{5}{6}$的和（参看§8的例）：

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{3}{6}+\frac{5}{6} \qquad \text{(习题62)}$$

$$=\frac{8}{6} \qquad \text{(习题63)}$$

$$=\frac{4}{3}. \qquad \text{(习题62)}$$

关于顺序，乘法，除法以及有限制的减法都可举出类似的例子。

习　题

63．以下算式都按§14的记法，请按我们的理论系统，注明每一步的根据：

1）$\frac{3}{2}<2$　（参看§7的例）．

2）$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$　（参看§9的例）．

3）$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{5}{3\cdot 2}=\frac{5}{6}$　（参看§10的例）．

4）$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{4}{3}$　（参看§11的例）．

§16．分数集的阿基米德性

整数集$\boldsymbol{W}$是分数集$\boldsymbol{F}$的子集——用几何的话说，整数点都在分数轴（参看图4）上。所谓分数集的阿基米德（Archimedes）性说的是整数点在分数轴上的分布情况：在分数轴上向右不论多么远的地方总能找到整数点。这对我们的习惯认识来说是当然的，但在逻辑上并不是自明的，需要加以证明。

〔定理20〕（阿基米德性）对于任何的分数x，总存在整数n，使$x<n$。

证　分数集没有最大数（定理13）．所以对于任何的$x\in\boldsymbol{F}$，存在$z\in\boldsymbol{F}$，使$x<z$。从§14，我们知道，一个分数可以表示成两个整数之商，故可设$z=\frac{n}{m}$，其中$n,m\in\boldsymbol{W}$，于是

$$x < \frac{n}{m}.$$

不等式两端乘以m，按乘法的单调性并根据商的定义，

$$mx < n.$$

但$1 \leqq m$（参看第一章，定理14），所以$x \leqq mx$，从而据传递性

$$x < n. \quad \blacksquare$$

以下是阿基米德性的更一般的形式：

〔**推论**〕对于任何的x，$y \in \boldsymbol{F}$，总存在$n \in \boldsymbol{W}$，使$x < ny$。

只要用分数$\frac{x}{y}$代替定理中的x就可以了。

推论说明，任意给定分数x，不论多么大，又任意给定分数y，不论多么小，总能找到整数n，使ny超过x。

第三章 有 理 数

§ . 引言·分数序偶

在第二章，我们通过自然数序偶引入了分数。在分数集$\boldsymbol{F}$内，任何两个数可以相除，从而除法问题被彻底解决了。但是在$\boldsymbol{F}$内同在自然数集$\boldsymbol{N}$内一样，我们只能谈论减数小于被减数的减法（第二章，§ 9）。在本章，我们将通过分数序偶引入有理数，以解决减法到处可行的问题。

为了启发我们思考应如何定义分数序偶的对等，顺序和运算，以解决减法问题，可先回顾一下前面对自然数序偶是怎样作的。在第二章，§ 1，我们说过，要比照小学算术中关于“分数”的有关法则来给出自然数序偶的对等、顺序和运算的定义。现在，在读者已读过第二章之后，分数的概念已经明确，我们稍为改变一下说法。在第二章，自然数序偶(n_1, n_2)代表着分数$\frac{n_1}{n_2}$，即代表整数n_1除以n_2的商数（第二章，§14）。商数的相等、顺序和运算都具有一般的法则（习题47—50）。这样，在定义它们的代表——自然数序偶——的对等、顺序和运算时，就应该适应这些法则。在第二章，§ § 2—5中就是这样作了。

现在，我们希望分数序偶(x_1, x_2)能代表差数x_1-x_2（不管x_1，x_2的大小）①，那么，在定义分数序偶的对等、

① 当然，就象上面$\frac{n_1}{n_2}$中的n_1，n_2不是原来意义的自然数一样，这里x_1-x_2中的x_1，x_2也不是原来意义的分数，而是后面将引入的有理数的特殊情形。

顺序和运算时，也应适应差数运算的一般法则。

按中学"有理数之差"的运算法则，

$$x_1 - x_2 = y_1 - y_2 \Longleftrightarrow x_1 + y_2 = y_1 + x_2.$$

可见，分数序偶 (x_1, x_2) 对等于 (y_1, y_2) 的条件就应是 $x_1 + y_2 = y_1 + x_2$。这条件只用了分数的加法，它是有定义的。

按中学"有理数之差"的运算法则，

$$x_1 - x_2 < y_1 - y_2 \Longleftrightarrow x_1 + y_2 < y_1 + x_2,$$

可见，分数序偶 (x_1, x_2) 小于 (y_1, y_2) 的条件就应是 $x_1 + y_2 < y_1 + x_2$，其中用到的分数的顺序是有定义的。

按中学"有理数之差"的运算法则，

$$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2),$$

可见，分数序偶 (x_1, x_2) 与 (y_1, y_2) 之和应是 $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$。

按中学"有理数之差"的运算法则，

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) = (x_1y_1 + x_2y_2) - (x_1y_2 + y_1x_2),$$

可见，分数序偶 (x_1, x_2) 与 (y_1, y_2) 之积应是 $(x_1y_1 + x_2y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$，其中用到的分数的乘法也是有定义的。

以上的分析是非正式的。作这些分析的目的是使读者了解下面几节关于分数序偶的对等、顺序和运算的正式定义的思想基础。

为了叙述方便，把分数序偶 (x_1, x_2) 中的分数 x_1 叫做它的前项，把其中的分数 x_2 叫做它的后项。一切分数序偶组成的集合 $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{F}$ 简记为 $\boldsymbol{B}$。

§2. 分数序偶的对等

在本章后面如无特殊规定，我们将用 x，y，z，u，

v 这五个英文字母来记分数，一般不再声明。

〔**定义**〕当且仅当 $x_1 +_F y_2 = y_1 +_F x_2$ 时，说序偶 (x_1, x_2) 对等于 (y_1, y_2)，记作

$$(x_1, x_2) \backsim (y_1, y_2).$$

当然，这里的对等是 $\boldsymbol{B}$ 中的关系，与第二章中的对等是 $\boldsymbol{P}$ 中的关系不是一回事。在这样的认识下，仍用 $\backsim$ 表示对等也不致引起混淆。同第二章，§ 2 的定义比较，可以发现，分数序偶对等的条件不过是把自然数序偶对等的条件中的乘法（在 $\boldsymbol{N}$ 中的）换成加法（在 $\boldsymbol{F}$ 中的）而已。

例如，$(2, 1) \backsim (3, 2) \backsim \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$，

$$(1, 2) \backsim (2, 3) \backsim \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

以下的注 1，注 2 和定理 1 分别给出与第二章 § 2 的注 1，注 2 和定理 1 相应的性质。要想证明它们，只要把原来证明中的自然数乘法换成分数的加法就可以了。

〔注 1〕相等的分数序偶必是对等的。

〔注 2〕$(x_1, x_2) \backsim (y + x_1, y + x_2)$.

结合下面定理 1 中关于 $\backsim$ 的对称性，注 2 说的是对于前项和后项，加以或消去同一加数，得到的分数序偶与原来的序偶保持对等（不一定相等）.

〔**定理 1**〕对等关系 $\backsim$ 是 $\boldsymbol{B}$ 中的等价关系，即对于任何的 (x_1, x_2)，(y_1, y_2)，$(z_1, z_2) \in \boldsymbol{B}$，

1)（自反性）$(x_1, x_2) \backsim (x_1, x_2)$，

2)（对称性）$(x_1, x_2) \backsim (y_1, y_2) \Rightarrow (y_1, y_2) \backsim (x_1, x_2)$，

3)（传递性）$(x_1, x_2) \backsim (y_1, y_2)$ 且 $(y_1, y_2) \backsim (z_1, z_2)$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) \backsim (z_1, z_2).$$

§3. 分数序偶的顺序

〔**定义**〕当且仅当$x_1 +_F y_2 <_F y_1 +_F x_2$时，说序偶$(x_1, x_2)$小于$(y_1, y_2)$，记作$(x_1, x_2) <_B (y_1, y_2)$，也说$(y_1, y_2)$大于$(x_1, x_2)$，记作$(y_1, y_2) >_B (x_1, x_2)$。

例如，$(3, 3) <_B (2, 1)$，$(1, 2) <_B \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$。

在不致引起混淆的情况下，我们略去$<_B$或$>_B$中的标记$\boldsymbol{B}$。

同上节一样，要想证明下面的注和定理2，3，只要把第二章，§3中相应性质的证明中的自然数的乘法换成分数的加法就可以了。

〔**注**〕$(x_1, x_2) < (y_1, y_2)$且$(x_1', x_2') \backsim (x_1, x_2)$且$(y_1', y_2') \backsim (y_1, y_2) \Rightarrow (x_1', x_2') < (y_1', y_2')$。

〔**定理2**〕（三歧性）对于任何的$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \boldsymbol{B}$，以下三种情形恰好有一种成立：

$$(x_1, x_2) \backsim (y_1, y_2),\quad (x_1, x_2) < (y_1, y_2),$$
$$(y_1, y_2) < (x_1, x_2).$$

〔**定理3**〕（传递性）$(x_1, x_2) < (y_1, y_2)$且$(y_1, y_2) < (z_1, z_2) \Rightarrow (x_1, x_2) < (z_1, z_2)$。

§4. 分数序偶的加法

〔**定义**〕我们把序偶$(x_1 +_F y_1, x_2 +_F y_2)$叫做序偶

(x_1, x_2)与(y_1, y_2)之和，记作

$$(x_1, x_2) +_B (y_1, y_2) = (x_1 +_F y_1,\ x_2 +_F y_2).$$

例如，$(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) +_B (\frac{1}{4}, \frac{1}{5}) = (\frac{7}{12}, \frac{7}{10})$.

在不致引起混淆的情况下，我们略去$+_B$中的标记B。

同自然数序偶的乘法定义（第二章，§ 5）相比较，可以发现，这里的定义还是用加法代替那里的乘法。因此以下诸性质的证明仍可象前两节那样，把过去有关自然数序偶乘法的相应性质的证明中的乘法换成现在的加法就可以了。

〔注〕$(x_1', x_2') \backsim (x_1, x_2)$且$(y_1', y_2') \backsim (y_1, y_2)$
$\Rightarrow (x_1', x_2') + (y_1', y_2') \backsim (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$.

〔定理4〕（交换律）

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2).$$

〔定理5〕（结合律）

$$((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) = (x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1, z_2)).$$

〔定理6〕（消去律）

$$(x_1, x_2) + (z_1, z_2) \backsim (y_1, y_2) + (z_1, z_2) \Rightarrow (x_1, x_2) \backsim (y_1, y_2).$$

〔定理7〕（加法的单调性）

$$(x_1, x_2) < (y_1, y_2) \Rightarrow (x_1, x_2) + (z_1, z_2) < (y_1, y_2) + (z_1, z_2).$$

〔推论〕$(x_1, x_2) < (y_1, y_2)$且$(z_1, z_2) < (u_1, u_2)$
$\Rightarrow (x_1, x_2) + (z_1, z_2) < (y_1, y_2) + (u_1, u_2)$.

习　　题

64. 选择§ § 2—4中一部分定理或注，写出它们的证明。

§ 5. 分数序偶的乘法

〔定义〕我们把序偶

$$(x_1 \cdot_F y_1 +_F x_2 \cdot_F y_2,\ x_1 \cdot_F y_2 +_F x_2 \cdot_F y_1)$$

叫做序偶(x_1, x_2)与(y_1, y_2)的积，记作

$$(x_1,\ x_2) \cdot_B (y_1,\ y_2) = (x_1 \cdot_F y_1 +_F x_2 \cdot_F y_2,$$

$$x_1 \cdot_F y_2 +_F x_2 \cdot_F y_1).$$

例如，$(1,\ 2) \cdot_B \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{5}{6},\ \frac{11}{12}\right)$.

在不致引起混淆的情况下，我们略去$\cdot_B$中的标记B，有时象通常那样把$\cdot$也略去。

应该注意，同加法定义不一样，分数序偶的乘法定义同自然数序偶的加法定义或乘法定义都不能作简单的对比。因此，本节有关分数序偶乘法的各项性质都只能独立证明。

〔注〕$(x_1',\ x_2') \backsim (x_1,\ x_2)$且$(y_1',\ y_2') \backsim (y_1,\ y_2)$

$$\Rightarrow (x_1',\ x_2')(y_1',\ y_2') \backsim (x_1,\ x_2)(y_1,\ y_2).$$

证明留给读者。

以下三个定理也请读者证明：

〔定理8〕（交换律）

$$(x_1,\ x_2)(y_1,\ y_2) = (y_1,\ y_2)(x_1,\ x_2).$$

〔定理9〕（结合律）

$$((x_1,\ x_2)(y_1,\ y_2))(z_1,\ z_2)$$

$$= (x_1,\ x_2)((y_1,\ y_2)(z_1,\ z_2)).$$

〔定理10〕（分配律）

$$(x_1,\ x_2)((y_1,\ y_2) + (z_1,\ z_2)) \backsim (x_1, x_2)(y_1, y_2)$$

$$+ (x_1,\ x_2)(z_1,\ z_2).$$

以下考虑乘法的单调性。至今为止，我们说乘法单调性指的是，用同一乘项乘不等式两端，不等式仍保持正确。例如，对于任何的分数 x，y，z，$x<y \Rightarrow xz<yz$。然而，在分数序偶的情形里，乘法单调性就没有这样简单，例如，不难验证，对于任何的序偶 $(x_1, x_2)<(y_1, y_2)$，

$$(x_1, x_2)(2, 1)<(y_1, y_2)(2, 1),$$

$$(y_1, y_2)(1, 2)<(x_1, x_2)(1, 2),$$

$$(x_1, x_2)(1, 1)\backsim(y_1, y_2)(1, 1).$$

为了证明下面的乘法单调性，我们先证一个关于分数的不等式：

$$x<y \text{ 且 } z<u \Rightarrow xu+yz<xz+yu.$$

事实上，因 $x<y$，故由第二章，§9，引理2可知，存在分数 v，使 $y=x+v$。于是

$$\begin{aligned} xu+yz &= xu+(x+v)z = xz+(xu+vz) \\ &< xz+(xu+vu) = xz+(x+v)u \\ &= xz+yu. \end{aligned}$$

∎

〔**定理11**〕（乘法的单调性）设给定 $(x_1, x_2)<(y_1, y_2)$，并给定 (z_1, z_2)：

1） 如 $z_2<z_1$，则 $(x_1, x_2)(z_1, z_2) < (y_1, y_2)(z_1, z_2)$，

2） 如 $z_1<z_2$，则 $(y_1, y_2)(z_1, z_2) < (x_1, x_2)(z_1, z_2)$，

3） 如 $z_1=z_2$，则 $(x_1, x_2)(z_1, z_2) \backsim (y_1, y_2)(z_1, z_2)$。

证 按定义，

$$(x_1, x_2)(z_1, z_2)=(x_1z_1+x_2z_2, \ x_1z_2+x_2z_1),$$

$$(y_1, y_2)(z_1, z_2) = (y_1z_1 + y_2z_2, y_1z_2 + y_2z_1).$$

为了比较这两个序偶，我们比较两个分数

$$(x_1z_1 + x_2z_2) + (y_1z_2 + y_2z_1),$$

$$(y_1z_1 + y_2z_2) + (x_1z_2 + x_2z_1).$$

按题设，

$$x_1 + y_2 < y_1 + x_2,$$

在情形1)中，$z_2 < z_1$，故根据方才证明的不等式，我们有

$$(y_1 + x_2)z_2 + (x_1 + y_2)z_1 < (x_1 + y_2)z_2 + (y_1 + x_2)z_1,$$

即

$$(x_1z_1 + x_2z_2) + (y_1z_2 + y_2z_1) < (y_1z_1 + y_2z_2) + (x_1z_2 + x_2z_1).$$

这就是说，

$$(x_1, x_2)(z_1, z_2) < (y_1, y_2)(z_1, z_2).$$

情形1)证完。在情形2)中，$z_1 < z_2$。由此不难推出

$$(y_1, y_2)(z_1, z_2) < (x_1, x_2)(z_1, z_2).$$

情形3)的结论是显然的。

〔定理12〕（消去律）

$$(x_1, x_2)(z_1, z_2) \backsim (y_1, y_2)(z_1, z_2) \text{且} z_1 \neq z_2 \Rightarrow (x_1, x_2) \backsim (y_1, y_2).$$

不妨用定理11来证明定理12。请读者写出证明的细节。值得注意的是，这里的消去律同以前的消去律稍有不同，这里只允许在$z_1 \neq z_2$的情况下从对等式两端消去同一乘项(z_1, z_2)。如果这个条件不被满足，即$z_1 = z_2$时，消去(z_1, z_2)后可能两边不再对等。例如

$$(2, 3)(1, 1) \backsim \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)(1, 1).$$

但 $(2, 3)$ 与 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ 并不对等。

习　题

65. 证明§5的注。
66. 证明定理8
67. 证明定理9．
68. 证明定理10．
69. 证明定理12．

§6．有理数

在前几节，我们定义并研究了分数序偶的对等、顺序、加法和乘法，其目的是引入有理数。我们知道，对等关系∽是分数序偶集$\boldsymbol{B}$中的一个等价关系（定理1）。因此，如用$[(x_1, x_2)]_\sim$记(x_1, x_2)的∽－等价类（一切与(x_1, x_2)对等的序偶的集合），则

$$\mathscr{C}=\{[(x_1,x_2)]_\sim \mid (x_1,x_2)\in \boldsymbol{B}\}$$

是$\boldsymbol{B}$的一个分类，其中每一等价类中的任何两个序偶对等，而且任何两个对等的序偶属于同一等价类。

〔定义〕 由对等关系∽决定的$\boldsymbol{B}$中的每个∽－等价类$[(x_1, x_2)]_\sim$叫做一个有理数，序偶(x_1, x_2)叫做这有理数的一个代表。

我们用$\boldsymbol{Q}$记一切有理数组成的集合。

为了简单，我们略去标记∽，只用$[(x_1, x_2)]$记以(x_1, x_2)为代表的有理数。

例如，

$$[(2, 1)]=\{(2, 1), (3, 2), (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}), \cdots\},$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}, 2\right)\right]=\left\{\left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(\frac{3}{2}, 3\right), \left(7, \frac{15}{2}\right), \cdots\right\},$$

$$[(1, 1)]=\left\{(1, 1), (2, 2), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \cdots\right\}$$

都是有理数。

显然，与序偶(x_1, x_2)对等的任何序偶都可取作有理数$[(x_1, x_2)]$的代表。例如

$$[(2, 1)]=[(3, 2)]=\left[\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]\cdots.$$

在本章，有时也用a，b，c，d，e这五个英文字母来记有理数，这就是说，$a=[(x_1, x_2)]$，当且仅当$(x_1, x_2)\in a$。

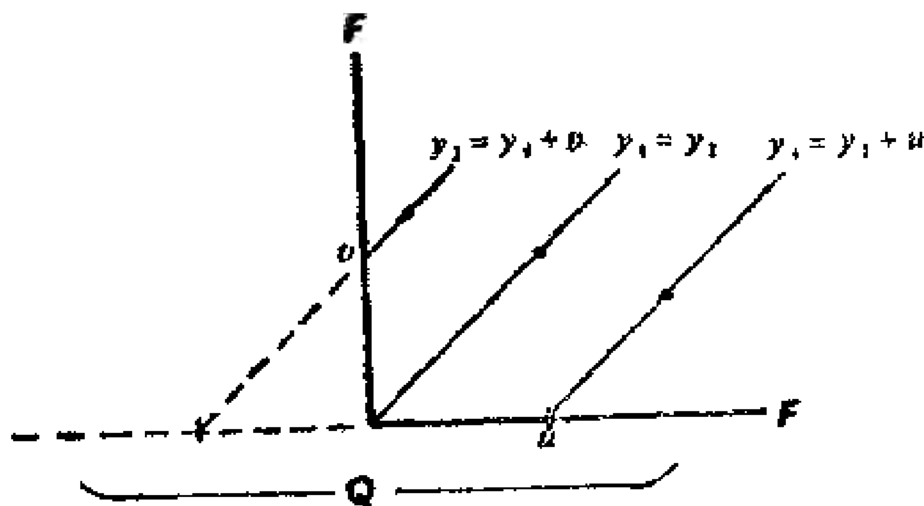


图 5

图5给出了有理数形成过程的示意图。图中半横轴（实线的）和半纵轴都表示分数轴(参看图4)。在这两个半轴所限定的四分之一平面上，只考虑横标和纵标都是分数的点，姑且把这样的点叫做二维分数点。每个二维分数点表示一个分数序偶.如果给定一个分数序偶(x_1, x_2)，就有三种可能：

1) $x_1=x_2$。这时对于任何序偶(y_1, y_2)来说，$(x_1, x_2)\backsim$

(y_1, y_2)，当且仅当$y_1 = y_2$。这样，在直线$y_1 = y_2$上的一切二维分数点的集合就表示以(x_1, x_2)为代表的有理数$[(x_1, x_2)]$。

2) $x_2 < x_1$。这时可设$x_1 = x_2 + u$。于是对于任何序偶(y_1, y_2)来说，$(x_1, x_2) \backsim (y_1, y_2)$，当且仅当$y_1 = y_2 + u$。这样，在直线$y_1 = y_2 + u$上一切二维分数点的集合就表示以$(x_1, x_2)$为代表的有理数$[(x_1, x_2)]$。

3) $x_1 < x_2$。这时可设$x_2 = x_1 + v$。同上理由，在直线$y_2 = y_1 + v$上一切二维分数点的集合就表示以(x_1, x_2)为代表的有理数$[(x_1, x_2)]$。

总而言之，分数序偶集$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{F}$的几何意义就是一切二维分数点的集合，而本节所说$\boldsymbol{B}$的分类就是把这些点分到斜率为1的直线上。通过任一二维分数点(x_1, x_2)且斜率为1的直线上的一切二维分数点的集合就表示以序偶(x_1, x_2)为代表的有理数$[(x_1, x_2)]$。

为了使有理数的图象单一化，还可作如下处理。把图中的半横轴向相反方向延长成为完全的横轴。我们用通过(x_1, x_2)且斜率为1的直线与全横轴的交点表示有理数$[(x_1, x_2)]$。一切这样的交点组成的点集叫做有理数轴。

正有理数·负有理数·数0

对于任一有理数，必须区别它是正的，或是负的，或是0，这种区分在有理数的理论中，尤其在有理数的实际应用中是必要的。

〔**定义**〕任意给定有理数$a = [(x_1, x_2)]$：

1) 当且仅当$x_2 < x_1$时，说a是一个正有理数，

2) 当且仅当$x_1 < x_2$时，说a是一个负有理数，

3) 当且仅当$x_1 = x_2$时，说a是0。

以上定义与 a 的代表 (x_1, x_2) 的选取无关。事实上，设 (y_1, y_2) 也是 a 的代表，则 $(x_1, x_2) \backsim (y_1, y_2)$，即

$$x_1 + y_2 = y_1 + x_2.$$

如 $x_2 < x_1$ $(x_1 < x_2)$，就必有 $y_2 < y_1$ $(y_1 < y_2)$，否则根据分数加法的单调性及其推论，就要得出矛盾的结果。如 $x_1 = x_2$，则根据分数加法的消去律，可知 $y_1 = y_2$。

例如，$\left[\left(2, \frac{1}{2}\right)\right]$ 是正有理数，$\left[\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\right)\right]$ 是负有理数，$[(1, 1)] = 0$。

我们把一切正有理数的集合记作 $\boldsymbol{Q}^+$，把一切负有理数的集合记作 $\boldsymbol{Q}^-$。这样就有

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^+ \cup \boldsymbol{Q}^- \cup \{0\}.$$

在图 5 的有理数轴上，与 0 对应的是坐标原点，与正有理数对应的点在坐标原点的右侧，与负有理数对应的点在坐标原点的左侧。

§7. 有理数的顺序

同分数的情形一样，我们将通过比较代表来比较有理数。这就是说，如 $(x_1, x_2) \in a$，$(y_1, y_2) \in b$，就通过比较分数序偶 (x_1, x_2) 与 (y_1, y_2) 来比较有理数 a 与 b。由 §3 的注可知，这样比较的结果不依赖代表的选取。可见以下定义是合理的：

〔**定义**〕对于有理数 a 和 b，任取 $(x_1, x_2) \in a$，$(y_1, y_2) \in b$。当且仅当 $(x_1, x_2) <_s (y_1, y_2)$ 时，说 a 小于 b，记作 $a <_Q b$，也说 b 大于 a，记作 $b >_Q a$。

例如，因 $\left(\frac{1}{2}, 3\right) <_s \left(\frac{1}{2}, 2\right)$，故有理数

$$\left[\left(\frac{1}{2},\ 3\right)\right]<_Q\left[\left(\frac{1}{2},\ 2\right)\right]=\left[\left(\frac{3}{2},\ 3\right)\right].$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去$<_Q$或$=_Q$中的标记$\boldsymbol{Q}$。

以下的定理2′，3′分别是定理2，3的直接推论：

〔**定理2′**〕（三歧性）对于任意的a，$b\in\boldsymbol{Q}$，以下三种情形恰好有一种成立：

$$a=b,\quad a<b,\quad b<a.$$

〔**定理3′**〕（传递性）

$$a<b\text{ 且 }b<c\Rightarrow a<c.$$

以下给出与顺序有关的其他性质。

我们知道，分数集$\boldsymbol{F}$没有最大数（第二章，定理13）。有理数集$\boldsymbol{Q}$具有同样的性质：

〔**定理13**〕对于任何的$a\in\boldsymbol{Q}$，总存在$b\in\boldsymbol{Q}$，使$a<b$。

证明留给读者。

我们知道，分数集$\boldsymbol{F}$没有最小数（第二章，定理14）。有理数集$\boldsymbol{Q}$具有同样的性质：

〔**定理14**〕对于任何的$a\in\boldsymbol{Q}$，总存在$b\in\boldsymbol{Q}$，使$b<a$。

证明也留给读者。

我们知道，分数集$\boldsymbol{F}$具有稠密性（第二章，定理15）。有理数集$\boldsymbol{Q}$具有同样性质：

〔**定理15**〕（稠密性）对于任何的a，$b\in\boldsymbol{Q}$，如$a<b$，则存在$c\in\boldsymbol{Q}$，使$a<c<b$。

证 任取$(x_1,\ x_2)\in a$，$(y_1,\ y_2)\in b$，并设

$$c=\left[\left(\frac{x_1+y_1}{2},\ \frac{x_2+y_2}{2}\right)\right].$$

现在证明$a<c$，这只要证明

$$(x_1,\ x_2)<\left(\frac{x_1+y_1}{2},\ \frac{x_2+y_2}{2}\right) \qquad (1)$$

就可以了。事实上，由题设，$(x_1,\ x_2)<(y_1,\ y_2)$，即

$$x_1+y_2<y_1+x_2.$$

于是

$$(x_1+x_2)+(x_1+y_2)<(x_1+x_2)+(y_1+x_2),$$

$$(x_1+x_1)+(x_2+y_2)<(x_1+y_1)+(x_2+x_2).$$

因$x+x=2x$（习题62），故

$$2x_1+(x_2+y_2)<(x_1+y_1)+2x_2.$$

用分数$\frac{1}{2}$乘不等式两端，我们得到

$$x_1+\frac{x_2+y_2}{2}<\frac{x_1+y_1}{2}+x_2.$$

可见不等式(1)成立，故$a<c$。类似地可证$c<b$。

以下定理确立正有理数与0，负有理数与0以及正有理数与负有理数之间的顺序：

〔定理16〕1） $a\in \boldsymbol{Q}^+\Longleftrightarrow 0<a$,

2） $a\in \boldsymbol{Q}^-\Longleftrightarrow a<0$,

3） $a\in \boldsymbol{Q}^+$且$b\in \boldsymbol{Q}^-\Rightarrow b<a$.

证 1） 任取$(x_1,\ x_2)\in a$，$(y,\ y)\in 0$。按照分数的有关性质，

$$x_2<x_1\Longleftrightarrow y+x_2<x_1+y.$$

按正有理数的定义及分数序偶的顺序定义，这等于说

$$a\in \boldsymbol{Q}^+\Longleftrightarrow (y,\ y)<(x_1,\ x_2).$$

按有理数的顺序定义，最后得到

$$a\in \boldsymbol{Q}^+\Longleftrightarrow 0<a.$$

2) 证明类似。

3) 根据1，2 及<关系的传递性。

习　　题

70. 证明定理13.

71. 证明定理14.

§ 8. 有理数的加法

〔**定义**〕对于任何的有理数a和b，任取$(x_1, x_2)\in a$，$(y_1, y_2)\in b$。我们把序偶$(x_1, x_2)+_B(y_1, y_2)$所代表的有理数叫做a与b的和，记作

$$a+_Q b=[(x_1, x_2)+_B(y_1, y_2)].$$

由§4的注，等式右端的有理数不依赖于代表$(x_1, x_2)\in a$，$(y_1, y_2)\in b$的选取，可见定义是合理的。

例如，

$$\left[\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right]+_Q\left[\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)\right]=\left[\left(\frac{1}{2}, 1\right)+_B\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)\right]$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}+_F\frac{5}{2}, 1+_F\frac{7}{2}\right)\right]=\left[\left(3, \frac{9}{2}\right)\right].$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去$+_Q$中的标记Q。

以下的定理4′—7′分别是定理4—7的直接推论：

〔**定理4′**〕（交换律）$a+b=b+a$。

〔**定理5′**〕（结合律）$(a+b)+c=a+(b+c)$。

〔**定理6′**〕（消去律）$a+c=b+c\Rightarrow a=b$。

〔**定理7′**〕（加法的单调性）$a<b\Rightarrow a+c<b+c$。

〔**推论**〕$a<b$且$c<d\Rightarrow a+c<b+d$。

§9. 有理数的减法

在§1我们已经指出，引入有理数的基本目的之一是解决加法的逆运算——减法的到处可行的问题。现在，我们已经通过分数序偶引入了有理数，定义了有理数的加法并证明了加法的基本算律。减法问题的解决已经到了成熟阶段。我们先证明以下的基本定理：

〔**减法存在定理**〕对于任何的a, $b\in\boldsymbol{Q}$，方程 $b+d=a$ 有唯一解d。

证 A）唯一性。设d，e都是方程的解，即

$$b+d=a=b+e,$$

则由加法消去律，可知$d=e$。

B）存在性，设$a=[(x_1, x_2)]$，$b=[(y_1, y_2)]$。取$d=[(x_1+y_2, x_2+y_1)]$，则因

$$(y_1, y_2)+(x_1+y_2, x_2+y_1)$$
$$=(x_1+(y_1+y_2), x_2+(y_1+y_2))$$
$$\backsim(x_1, x_2). \qquad (\S 2, 注2.)$$

故

$$b+d=a.$$

〔**定义**〕对于任何的a，$b\in\boldsymbol{Q}$，我们把方程$b+_Q d=a$的唯一解d叫作a减b的差，记作$d=a-_Q b$：

$$b+_Q(a-_Q b)=a.$$

〔**注**〕由存在定理的证明可知，如$a=[(x_1, x_2)]$，$b=[(y_1, y_2)]$，则

$$a-_Q b=[(x_1+_F y_2, x_2+_F y_1)].$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去$-_Q$中的标记$\boldsymbol{Q}$。

§10. 有理数 0 · 相反数 · 绝对值

在§6我们已经定义了数 0，即以具有相同的前项与后项的分数序偶为代表的有理数$[(x, x)]$。0 是有理数集$\boldsymbol{Q}$的加法恒等元：

〔定理17〕 对于任何的$a\in\boldsymbol{Q}$，$a+0=a$。

证 设$a=[(x_1, x_2)]$，$0=[(y, y)]$，则由§2的注2，

$$(x_1, x_2)+(y, y)=(x_1+y, x_2+y)\backsim(x_1, x_2)$$ ∎

设给定$a\in\boldsymbol{Q}$。由减法存在定理可知，方程$a+d=0$有唯一解d。

〔定义〕 对于任何的$a\in\boldsymbol{Q}$，我们把方程$a+d=0$的唯一解d做作a的相反数，记作$d=-a$；

$$a+(-a)=0.$$

〔注1〕 按照差的定义，

$$-a=0-a.$$ ①

〔注2〕 不难验证，如$a=[(x_1, x_2)]$，

则$-a=[(x_2, x_1)]$。

例如，$\left[\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right]=-\left[\left(1, \frac{1}{2}\right)\right]$。

由注2很易推出以下的定理18和定理19。

〔定理18〕 1) $a\in\boldsymbol{Q}^+$(即$0<a$)$\Rightarrow -a\in\boldsymbol{Q}^-$(即$-a<0$)。

2) $a\in\boldsymbol{Q}^-$(即$a<0$)$\Rightarrow -a\in\boldsymbol{Q}^+$(即$0<-a$)，

3) $a=0\Longleftrightarrow a=-a$。

定理18说明，正有理数的相反数是负有理数，负有理数

---

①注意，等号左端的－号连同a表示a的相反数，而右端的－号则表示减法。

的相反数是正有理数，0是唯一等于自己相反数的有理数。

〔定理19〕 $a<b \Longleftrightarrow -b<-a$。

〔定理20〕（符号法则）

1) $-(-a)=a$。

2) $a-b=a+(-b)$。

3) $-(a+b)=(-a)+(-b)$。

4) $a-(-b)=a+b$。

5) $-(a-b)=(-a)+b$。

6) $a+(b-c)=(a+b)-c$。

7) $a-(b+c)=(a-b)-c$。

8) $a-(b-c)=(a-b)+c$。

证 1) 由定义直接推出。

2) 由相反数的定义及定理17，

$$(a+(-b))+b=a+((-b)+b)=a+0=a。$$

故由差的定义，

$$a-b=a+(-b)。$$

3) 由相反数的定义及定理17，

$$\begin{aligned}&(a+b)+((-a)+(-b))\\ =&(a+(-a))+(b+(-b))=0+0=0。\end{aligned}$$

故再由相反数的定义，

$$-(a+b)=(-a)+(-b)。$$

4)—8)都可由1)—3)推出。

公式1)—8)都是在实际计算中经常用到的。值得注意的是，公式2)把减法转化为加法。

绝对值概念是数学中经常遇到的概念，以下是它的定义：

〔定义〕

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当 } a>0, \\ 0, & \text{当 } a=0, \\ -a, & \text{当 } a<0. \end{cases}$$

$|a|$叫做有理数 a 的绝对值。

例如，

$$\left|\left[\left(1,\ \frac{1}{2}\right)\right]\right|=\left[\left(1,\ \frac{1}{2}\right)\right],$$

$$|[(1,\ 1)]|=[(1,\ 1)]=0$$

$$\left|\left[\left(\frac{1}{2},\ 1\right)\right]\right|=-\left[\left(\frac{1}{2},\ 1\right)\right]=\left[\left(1,\ \frac{1}{2}\right)\right].$$

〔注3〕 由 $|a|$ 的定义，显然对于任何的 $a\in\boldsymbol{Q}$，$|a|\geq 0$，而且当且仅当$a=0$时，$|a|=0$。

〔注4〕 显然，任何有理数与其相反数有共同的绝对值：

$$|a|=|-a|.$$

在中学代数里，规定正有理数大于0，负有理数小于0，负有理数小于正有理数。这已在定理16中被我们证明了。另外，在中学代数里，对于两个负有理数，还规定绝对值大的小于绝对值小的。这就是

〔定理21〕 对于任何的 $a<0$，$b<0$：

$$a<b\Longleftrightarrow |b|<|a|.$$

这不过是定理19的特殊情形。

以下定理叙述的是中学代数里关于有负数参加的加法的规定：

〔定理22〕 1）如$a<0$，$b<0$，则

$$a+b=-(|a|+|b|).$$

2. 如$a>0$，$b<0$，则

$$a+b=|a|-|b|$$

（在$|b|<|a|$时用这公式）

$$a+b=-(|b|-|a|).$$

（在$|b|>|a|$时用这公式）

证明留给读者。

习　题

72. 证明§10的注2及定理18，19.

73. 证明定理20中的4)—8).

74. 证明：$a<b\Leftrightarrow a-b<0\Leftrightarrow 0<b-a$.

75. 证明定理22.

76. 证明：1) $|a+b|\leq|a|+|b|$.
　　　　2) $|a-b|\geq|a|-|b|$.

§11. 有理数的乘法

〔定义〕对于任何的有理数a，b，任取$(x_1, x_2)\in a$，$(y_1, y_2)\in b$。我们把序偶$(x_1,x_2)\cdot_B(y_1, y_2)$所代表的有理数叫做$a$与$b$的积，记作

$$a\cdot_Q b=[(x_1, x_2)\cdot_B(y_1, y_2)].$$

由§5的注可知，等式右端的有理数不依赖于代表$(x_1, x_2)\in a$，$(y_1,y_2)\in b$的选取，可见定义是合理的。

在不致引起混淆的情况下，我们略去$\cdot_Q$中的标记Q，有时象通常那样，把·也略去。

以下的定理8′—12′分别是定理8—12的直接推论。

〔定理8′〕（交换律）$ab=ba$.

〔定理9′〕（结合律）$(ab)c=a(bc)$。

〔定理10′〕（分配律）$a(b+c)=ab+ac$。

〔定理11′〕（乘法的单调性）设 $a<b$，

1） 如 $c>0$，则 $ac<bc$，

2） 如 $c<0$，则 $bc<ac$，

3） 如 $c=0$，则 $ac=bc=0$。

和自然数以及分数的情况不同，有理数乘法的单调性不再保持为递增性。

由定理11′不难推出，两正有理数或两负有理数之积是正的，一正一负两有理数之积是负的。

〔定理12′〕（消去律）$ac=bc$ 且 $c\neq 0\Rightarrow a=b$。

以下是乘法有关数 0 的性质：

〔定理23〕对于任何的 $a\in Q$，$a\cdot 0=0$。

证 设 $a=[(x_1,\ x_2)]$，$0=[(y,\ y)]$。我们有

$$(x_1,\ x_2)(y,\ y)=(x_1y+x_2y,\ x_1y+x_2y)。$$

故

$$a\cdot 0=0。$$

〔定理24〕$ab=0\Longleftrightarrow a=0$ 或 $b=0$。

证 定理中"$\Leftarrow$"部分已在定理23中被证明。以下证明"$\Rightarrow$"部分。设 $ab=0$。由定理23，这可写成

$$ab=a\cdot 0 \quad 或 \quad ab=0\cdot b。$$

如 $a\neq 0$，则由消去律可得 $b=0$。如 $b\neq 0$，则由消去律可得 $a=0$。可见 a，b 二者至少有一为 0。

〔定理25〕（符号法则）

1） $(-a)b=-(ab)$。

2) $(-a)(-b)=ab$.

证明留给读者。

以下定理叙述中学代数中关于有负数参加的乘法的规定，也请读者自己证明。

〔定理26〕 1) 如 $a<0$，$b<0$，则 $ab=|a|\cdot|b|$。

2) 如 $a>0$，$b<0$，则 $ab=-(|a|\cdot|b|)$。

习 题

77. 证明定理25.

78. 证明定理26.

79. 证明：$a(b-c)=ab-ac$.

80. 证明：$|ab|=|a|\cdot|b|$.

§12. 有理数的除法

在第二章，我们在自然数集$\boldsymbol{N}$的基础上引入了分数集$\boldsymbol{F}$，乘法的逆运算——除法就毫无限制的了。在本章，我们又在分数集$\boldsymbol{F}$的基础上引入有理数集$\boldsymbol{Q}$，加法的逆运算——减法就毫无限制的了。现在谈论有理数集$\boldsymbol{Q}$中乘法的逆运算——除法①。下面就要看到，由于在$\boldsymbol{Q}$中引入了加法恒等元——数0，除法就不能毫无限制，而只能在除数非零的条件下进行。

〔引理〕对于任何的有理数 a 及任何的有理数 $b\neq 0$，方程

$$bd=a$$

有唯一解d。并且，当 $a\neq 0$ 且 $b=0$ 时，方程无解；当 $a=$

①这里采用习惯的说法，把 Q 中的除法叫做乘法的逆运算，严格说来，Q 中的除法不是Q中的运算，而是$Q\times(Q\setminus\{0\})$到Q中的一个映射。

$b=0$时，任何有理数d是方程的解。

证 A）解的唯一性．设$b\neq 0$。如d，e都是方程的解，即

$$bd=a=be,$$

则由乘法消去律，$d=e$。

B）解的存在性。设$b\neq 0$。任取$(x_1, x_2)\in a$，$(y_1, y_2)\in b$，其中$y_1\neq y_2$。以下分两种情况：

i）$y_2<y_1$。我们取

$$d=\left[\left(\frac{x_1}{y_1-y_2}, \frac{x_2}{y_1-y_2}\right)\right],$$

并看乘积

$$(y_1, y_2)\left(\frac{x_1}{y_1-y_2}, \frac{x_2}{y_1-y_2}\right)$$

$$=\left(\frac{x_1y_1+x_2y_2}{y_1-y_2}, \frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1-y_2}\right),$$

（习题53）。按照分数有限制的减法的定义，这里的前项等于

$$\frac{((x_1y_1+x_2y_2)+x_1y_2)-x_1y_2}{y_1-y_2}$$

$$=\frac{((x_1y_2+x_2y_2)+x_1y_1)-x_1y_2}{y_1-y_2}$$

$$=\frac{(x_1y_2+x_2y_2)+(x_1y_1-x_1y_2)}{y_1-y_2}$$

（习题36）。再由习题53及习题46，最后的分数等于

$$\frac{(x_1+x_2)y_2}{y_1-y_2}+\frac{x_1(y_1-y_2)}{y_1-y_2}=\frac{(x_1+x_2)y_2}{y_1-y_2}+x_1$$

（商的定义）．类似地可证乘积

$(y_1, y_2)\left(\frac{x_1}{y_1-y_2}, \frac{x_2}{y_1-y_2}\right)$的后项等于$\frac{(x_1+x_2)y_2}{y_1-y_2}+x_2$

于是，根据§ 2的注 2，

$$(y_1,\ y_2)\left(\frac{x_1}{y_1-y_2},\ \frac{x_2}{y_1-y_2}\right)\backsim(x_1,\ x_2),$$

故

$$bd=a.$$

ii) $y_1<y_2$. 取

$$d=\left[\left(\frac{x_2}{y_2-y_1},\ \frac{x_1}{y_2-y_1}\right)\right].$$

不难验证它是方程的解。

C) 设$a\neq0, b=0$，则对于任何的有理数$d, bd=0\neq a$，可见方程无解。其次，设$a=b=0$，则对于任何的有理数d，$bd=0=a$。

〔定义〕对于任何的$a, b\in \boldsymbol{Q}$，其中$b\neq0$，我们把方程$b\cdot_Q d=a$的唯一解d叫做a除以$b\neq0$的商，记以$d=\frac{a}{b}{}_Q$：

$$b\cdot_Q\left(\frac{a}{b}{}_Q\right)=a.$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去$-_Q$中的标记$\boldsymbol{Q}$。

〔注〕习题47，49—53所列举的关于分数之商的性质，除添加除数不得为0的条件外，对于有理数都成立。其证明（按商的定义）也是逐字逐句的重复。

习　　题

81、证明：1) $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$ $(b\neq0)$.

2) $\frac{-a}{-a}=\frac{a}{b}$ $(b\neq0)$.

82、证明：$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$. $(b\neq0)$.

§13. 有理数+1·倒数

任意给定分数x_0。记

$$+1=[(x_0+1,\ x_0)]。$$

不难验证，+1与x_0的选取无关，即对于任何的分数x_0，y_0，总有

$$(x_0+1,\ x_0)\backsim(y_0+1,\ y_0)。$$

同分数1是分数集F的乘法恒等元一样，有理数+1是有理数集Q的乘法恒等元：

〔定理27〕对于任何的$a\in Q$，

$$a\cdot(+1)=a。$$

证 设 $a=[(x_1,\ x_2)]$，我们有

$$\begin{aligned}&(x_1,\ x_2)(x_0+1,\ x_0)\\&=(x_1(x_0+1)+x_2x_0,x_1x_0+x_2(x_0+1))\\&=(x_1+(x_1x_0+x_2x_0),\ x_2+(x_1x_0+x_2x_0))\\&\backsim(x_1,\ x_2)。\end{aligned}$$

〔定义〕我们把有理数+1除以$a\neq 0$的商$\frac{+1}{a}$叫做有理数$a\neq 0$的倒数：

$$a\cdot\left(\frac{+1}{a}\right)=+1。$$

〔注1〕同分数的情况一样，有了倒数概念，就可以把有理数的除法化为乘法：

$$\frac{a}{b}=a\cdot\left(\frac{+1}{b}\right)\qquad(b\neq 0)。$$

这是极易验证的。

〔注2〕习题54—57所列举的关于分数1及倒数的性

质，如把 1 换成有理数 $+1$，并适当添加除数不得为 0 的条件，则这些性质对于有理数都成立。其证明也可以是逐字逐句地重复。

§14. 分数集嵌入有理数集

在第二章，§13，我们曾用映射

$E:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{F}$，其中$E(n)=[(n,\ 1)]$

将自然数集$\boldsymbol{N}$关于顺序、加法与乘法同构地嵌入分数集$\boldsymbol{F}$，与$\boldsymbol{N}$同构的是整数集$\boldsymbol{W}\subset\boldsymbol{F}$。正是在同构嵌入的意义下，我们把分数集$\boldsymbol{F}$看成是自然数集$\boldsymbol{N}$的一个扩充。在本节，我们将构造一个映射，把分数集$\boldsymbol{F}$关于顺序、加法和乘法同构地嵌入有理数集$\boldsymbol{Q}$。在这意义下就可把有理数集$\boldsymbol{Q}$看成是分数集$\boldsymbol{F}$的一个扩充。

任取$x_0\in\boldsymbol{F}$。看映射

$F:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{Q}$，其中$F(x)=[(x_0+x,\ x_0)]$。

现在证明，映射F不依赖于$x_0\in\boldsymbol{F}$的选取。事实上，对于任何的x_0，$y_0\in\boldsymbol{F}$以及任何的$x\in\boldsymbol{F}$，

$$(x_0+x,\ x_0)\backsim(y_0+x,\ y_0).$$

例如 $F(2)=[(x_0+2,\ x_0)]$，

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\left(x_0+\frac{1}{2},\ x_0\right)\right].$$

〔定理28〕映射F是单射且$F(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{Q}^+$，即$F$是从$\boldsymbol{F}$到$\boldsymbol{Q}^+\subset\boldsymbol{Q}$的一个一一对应。

证 A) F是单射。事实上，如$F(x)=F(y)$，即

$$[(x_0+x,\ x_0)]=[(x_0+y,\ x_0)],$$

$$(x_0+x,\ x_0)\backsim(x_0+y,\ x_0),$$

$$(x_0+x)+x_0=(x_0+y)+x_0,$$

故 $x=y$。

B) $F(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{Q}^+$。事实上，对于任何的$a\in F(\boldsymbol{F})$，存在某个$x\in\boldsymbol{F}$，使$a=F(x)=[(x_0+x, x_0)]$。因$x_0<x_0+x$（第二章，§9，引理1），故$a\in\boldsymbol{Q}^+$。另一方面，对于任何的$a\in\boldsymbol{Q}^+$，存在$x_1, x_2\in\boldsymbol{F}$且$x_2<x_1$，使$a=[(x_1, x_2)]$。现在设分数$x=x_1-x_2$（第二章，§9，定义），则

$$F(x)=F(x_1-x_2)=[(x_0+(x_1-x_2), x_0)].$$

以下证明

$$(x_0+(x_1-x_2), x_0)\backsim(x_1, x_2).$$

事实上，由§2，注2，

$$\begin{aligned}(x_0+(x_1-x_2), x_0)&\backsim((x_0+(x_1-x_2))+x_2, x_0+x_2)\\&=(x_0+x_1, x_0+x_2)\backsim(x_1, x_2).\end{aligned}$$

可见$F(x)=a$，于是$a\in F(\boldsymbol{F})$。

〔注〕由定理证明的最后部分可以看出，当$[(x_1, x_2)]$是正有理数(即$x_2<x_1$时)，它就是分数$x=x_1-x_2$的对应值：

$$F(x)=[(x_1, x_2)].$$

为了同传统的记法一致，我们用+（　　）记映射F，即在分数x前添加一个+号，来记与x对应的正有理数：

$$+x=[(x_1, x_2)],\text{ 其中}x=x_1-x_2,\ x_2<x_1\text{①}$$

例如，对于正有理数$\left[\left(1, \frac{2}{3}\right)\right]$，我们有$x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，于是

$$+\frac{1}{3}=\left[\left(1, \frac{2}{3}\right)\right]=\left[\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)\right]=\cdots.$$

---

①§13中的记法+1与这里的规定一致。

这样，正有理数的记法单一化了。

以下是与第二章，定理17_{2-4}相应的定理，其证明留给读者。

〔定理28_2〕 $x <_F y \Longleftrightarrow (+x) <_Q (+y)$。

〔定理28_3〕 $+(x +_F y) = (+x) +_Q (+y)$。

〔定理28_4〕 $+(x \cdot_F y) = (+x) \cdot_Q (+y)$。

以上四个定理说明，从分数集$\boldsymbol{F}$到正有理数集$\boldsymbol{Q}^+ \subset \boldsymbol{Q}$有一一对应$F$；在分数集$\boldsymbol{F}$里两个数$x$，$y$之间的顺序，在正有理数集$\boldsymbol{Q}^+$里对应的数$+x$，$+y$之间仍旧保持，并且倒过来也对；在分数集$\boldsymbol{F}$里两个数$x$，$y$之和（积），对应的是正有理数集$\boldsymbol{Q}^+$里两个对应的数$+x$，$+y$之和（积），并且由于$F$是单射，所以倒过来也对。

按照定理28_{1-4}的意义，我们说：

在映射F下，关于$<_F$与$<_Q$，$+_F$与$+_Q$，$\cdot_F$与$\cdot_Q$，分数集$\boldsymbol{F}$与正有理数集$\boldsymbol{Q}^+ \subset \boldsymbol{Q}$同构，或说，关于$<_F$与$<_Q$，$+_F$与$+_Q$，$\cdot_F$与$\cdot_Q$，$\boldsymbol{F}$被映射$F$同构地嵌入$\boldsymbol{Q}$。

习　题

83．证明定理28_2。

84．证明定理28_3。

85．证明定理28_4。

86．试证对于任何的分数$y<x$，

$+(x -_F y) = (+x) -_Q (+y)$。

87．试证对于任何的x，$y \in \boldsymbol{F}$，

$$+\left(\frac{x}{y}_F\right) = \frac{+x}{+y}_Q$$

88．在第二章，§14，我们已经知道任一分数可以表成两个整数之商．现在，把形如$+n$（n是整数）的正有理数叫正整数①．试证，任一正有理数可以表成两个正整数之商。

①参看后面§16的定义。

§ 15. 在实际计算中有理数的比较与运算

首先，关于记号作如下约定。按上节的注，任何正有理数都可表成$+x$，其中x是某一分数。另一方面，任一负有理数总是某一正有理数$+x$的相反数$-(+x)$。为了简化记号，我们约定：

用$-x$记负有理数$-(+x)$。

例如，用$-\frac{2}{3}$记$+\frac{2}{3}$的相反数。这同传统的记法是一致的。

在第二章，§ 15，我们曾谈论对分数的具体计算问题。我们曾指出，在实际计算分数时，不必直接按照定义，只要按照小学算术中学过的方法进行就可以了，而这样计算的每一步骤，都可以在我们的理论系统里找到根据。对于有理数的实际计算也是这样，也不必直接按照定义，只要按照在中学代数中学过的规定进行就可以了。为了说明这些规定在我们理论系统里的根据，我们在下面较详细地把问题阐述一下。

1) 当参加顺序比较或参加加法或乘法运算的两个有理数都是正的时，就按定理28_{2-4}把正有理数的问题化为相应的分数问题。例如，正有理数$+\frac{1}{3}<+\frac{1}{2}$，这是由于分数$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$并根据定理$28_2$。又如，根据定理$28_3$，定理$28_4$，

$$\left(+\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)^{①}=+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=+\frac{5}{6}.$$

$$\left(+\frac{1}{3}\right)\left(+\frac{1}{2}\right)=+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=+\frac{1}{6}.$$

---

① 注意，括号中的＋号表示映射F，而连接两个括号的＋号则表示加法。

2) 当参加顺序比较或参加加法或乘法运算的两个有理数至少有一为0时，就分别按定理16，定理17，定理23进行。例如，$0<+\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}<0$。又如，

$$\left(-\frac{1}{2}\right)+0=-\frac{1}{2}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0=0.$$

3) 当参加顺序比较或参加加法或乘法运算的两个有理数全不是0但至少有一为负时，就分别按定理16(或定理21)，定理22，定理26进行。例如，$-\frac{1}{3}<+\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}<-\frac{1}{3}$。又如，

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)&=-\left(\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)\right)\\&=-\left(+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right) \quad (\text{定理}28_2)\\&=-\left(+\frac{5}{6}\right)=-\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)&=-\left(\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)\right)\\&=-\left(+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right) \quad (\text{习题}86)\\&=-\left(+\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

由于有理数的减法和除法（禁以0除）可以分别化为加法和乘法（定理20，2)及§13的注1），我们就不必另外讨论了。

综上所述，可以看出，本书所说的有理数的顺序和运算，同初中代数中所说的同名概念是一致的。不过，本书所说的这些概念是建立在简单而明确的定义上的。

§16. 正整数集代替整数集

在第二章，§13，我们把形如〔(n，1)〕的分数叫做整数，并在同章§14中约定仍以记自然数的字母 n 记这整数。现在已把分数集$\boldsymbol{F}$发展到有理数集$\boldsymbol{Q}$，并把$\boldsymbol{F}$在映射$F = +(\ )$下同构地嵌入$\boldsymbol{Q}$。现在引入以下两个名称：

〔**定义**〕形如 $F(n) = +n$ 的有理数叫正整数，形如 $-n$（看§15关于记号的约定）的有理数叫负整数。

例如，$+1$，$+2$，$+3$都是正整数，-1，-2，-3都是负整数。

我们用$\boldsymbol{J}^+$记一切正整数的集合，用$\boldsymbol{J}^-$记一切负整数的集合。

应该指出，通常把$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^+ \cup \boldsymbol{J}^- \cup \{0\}$叫做"整数集"，但为了避免同第二章的整数集$\boldsymbol{W}$混淆，在本书中不采用这个称呼。

在第二章，§13，我们知道，在映射E下，自然数集$\boldsymbol{N}$与整数集$\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{F}$关于顺序、加法和乘法同构。现在：

在映射F下，整数集$\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{F}$与正整数集$\boldsymbol{J}^+ \subset \boldsymbol{Q}$关于顺序、加法与乘法同构。

这是因为，首先，F是单射，并且，由定义，显然有$F(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{J}^+$，这就是说，与定理$28_1$相应的论断成立。其次，由于整数是分数的特殊情况，并且相应地，正整数也是正有理数的特殊情况，所以，关于$\boldsymbol{W}$与$\boldsymbol{J}^+$，与定理28_{2-4}相应的论断都成立。 ▌

第二章的定理18，19告诉我们，整数集$\boldsymbol{W}$满足自然数集$\boldsymbol{N}$的裴阿诺公理并满足自然数集$\boldsymbol{N}$的顺序、加法和乘法的定

义，从而$\boldsymbol{W}$具有第一章关于$\boldsymbol{N}$的一切性质。正整数集$\boldsymbol{J}^+$也是这样。我们把有关定理写在下面，其证明和第二章，定理18，19的证明类似，请读者自己完成。

〔定理29〕在$\boldsymbol{J}^+$中，用$+1$代替$\boldsymbol{N}$中的1，并加下定义后继映射$(\quad)^{+J+}: \boldsymbol{J}^+ \to \boldsymbol{J}^+$：

$$(+n)^{+J+} = +(n^{+w})$$

(叫做$+n$的后继者)，则$\boldsymbol{J}^+$满足$\boldsymbol{N}$的裴阿诺公理，即：

A) $+1 \in \boldsymbol{J}^+$.

B) 1) 对于任何的$+n \in \boldsymbol{J}^+$，$(+n)^{+J+} \neq +1$.

2) $(\quad)^{+J+}$是单射.

3) (归纳原理) 设$M \subset \boldsymbol{J}^+$，如果

i) $+1 \in M$,

ii) 对于任何的$+n \in \boldsymbol{J}^+$，

$+n \in M \Rightarrow (+n)^{+J+} \in M$,

则 $M = \boldsymbol{J}^+$.

〔定理30〕正整数的加法、乘法和顺序分别满足自然数的加法、乘法和顺序的定义，即对于任何的$+n, +m \in \boldsymbol{J}^+$，

A) 1) $(+n) +_Q (+1) = (+n)^{+J+}$.

2) $(+n) +_Q (+m)^{+J+} = ((+n) +_Q (+m))^{+J+}$.

B) 1) $(+n) \cdot_Q (+1) = +n$,

2) $(+n) \cdot_Q (+m)^{+J+} = (+n) \cdot_Q (+m) +_Q (+n)$.

C) $(+n) <_Q (+m) \Longleftrightarrow$ 存在某个$+j \in \boldsymbol{J}^+$，使

$+m = (+n) +_Q (+j)$.

综观定理29，30，可以断定，正整数集$\boldsymbol{J}^+$具有第一章中

关于自然数集$\boldsymbol{N}$的一切性质。这样，正整数集$\boldsymbol{J}^+\subset\boldsymbol{Q}$就可以代替整数集$\boldsymbol{W}\subset\boldsymbol{F}$（$\boldsymbol{W}$已在第二章，§14代替了$\boldsymbol{N}$），在新的数系$\boldsymbol{Q}$的内部继续起着自然数集$\boldsymbol{N}$的作用。

关于记号的约定 今约定：

如无特殊声明，今后就用表示分数的同样记号x来记正有理数$+x$，略去其前面的$+$号。特别是，用表示整数的（本来用以表示自然数的）同样记号n来记正整数$+n$。

例如，用$\frac{2}{3}$记正有理数$+\frac{2}{3}$，用2记正整数$+2$。

习 题

89. 证明定理29.
90. 证明定理30.
91. 试证对于任何有理数a,
    1) $a+a=2a$.
    2) $(-1)\cdot a=-a$.
92. 试证，对于任何的有理数$((x_1, x_2))$,

$$((x_1, x_2))=(+x_1)-(+x_2).$$

（用现在约定的记号，这就是

$$((x_1, x_2))=x_1-x_2.$$

这就在我们的理论系统里实现了§1所说的，分数序偶(x_1, x_2)是两个正有理数x_1，x_2之差x_1-x_2的代表。）

§17. 正有理数集的阿基米德性

在第二章，§15，我们看到分数集$\boldsymbol{F}$具有阿基米德性。以下的定理及其证明说明，与$\boldsymbol{F}$同构的正有理数集$\boldsymbol{Q}^+$自然而然地继承了这一性质。

〔定理31〕（阿基米德性）对于任何的$x\in\boldsymbol{Q}^+$，总存在

$n\in J^{+}$，使$x<n$。

证 为了叙述方便，我们暂时放弃§16关于记号的约定，仍用x表分数，用$+x$表对应的正有理数；用n表整数，用$+n$表对应的正整数。

由第二章，定理20，对于分数x，存在整数n，使

$$x<_{F}n.$$

由本章的定理28_2，立刻得到

$$+x<_{Q}+n,$$

这就是所要证明的。

〔推论〕对于任何的x，$y\in Q^{+}$，总存在，$n\in J^{+}$，使$x<ny$。

思 考 题

我们从自然数集N出发，引入了分数集F，解决了乘法的逆运算——除法的施行问题，然后引入了有理数集Q，解决了加法的逆运算——减法的施行问题，这个次序可以颠倒过来。下面提出一个先解决减法后解决除法的一个程序的提纲。请读者完成这个程序的细节，包括应有的证明。为了区别于已经引入的名称，我们暂时设立两个名称："全数"和"比数"。其实"全数"就是通常所说的包括正负整数和0的"整数"，"比数"就是通常所说的"有理数"。

一、全 数

按照第三章定义分数序偶的对等、顺序，加法和乘法的方式定义自然数序偶的对等、顺序、加法和乘法，把由对等关系决定的自然数序偶集P中的每一等价类$X=\{(n_1, n_2)\}$叫做一个全数。一切全数的集合记为H。用代表的小于，加法和乘法定义全数的$<_H$，$+_H$，和$\cdot_H\cdot_H$连同$<$，$+$，$\cdot$（略去标记H）具有以下性质：

1．（恒等元）全数$\Theta=\{(n_0, n_0)\}$和$U=\{(n_0+1, n_0)\}$（其中n_0是任给的自然数）分别是H的加法恒等元和乘法恒等元，即对于任何的$X\in H$，

$$X+\Theta=\Theta+X=X,\quad X\cdot U=U\cdot X=X.$$

2．（交换律）对于任何的X，$Y\in H$，

$$X+Y=Y+X,\qquad X\cdot Y=Y\cdot X.$$

3．（结合律）对于任何的X，Y，$Z\in H$，

$$(X+Y)+Z=X+(Y+Z),\quad (X\cdot Y)\cdot Z=X\cdot(Y\cdot Z).$$

4．（分配律）对于任何的X，Y，$Z\in H$，

$$X\cdot(Y+Z)=X\cdot Y+X\cdot Z.$$

5．（消去律）1）对于任何的X，Y，$Z\in H$，

$$X+Z=Y+Z\Rightarrow X=Y.$$

2）对于任何的X，Y，$Z\in H$，其中$Z\neq\Theta$，

$$X\cdot Z=Y\cdot Z\Rightarrow X=Y.$$

6．（差的存在性）对于任何的X，$Y\in H$，方程

$$Y+V=X$$

有唯一解V．定义$V=X-Y$．

7．（顺序的三歧性与传递性）

1）对于任何的X，$Y\in H$，以下三种情形恰好有一种成立：

$$X=Y,\quad X<Y,\quad Y<X.$$

2）对于任何的X，Y，$Z\in H$，

$$X<Y\text{且}Y<Z\Rightarrow X<Z.$$

8．（加法和乘法的单调性）

1）对于任何的X，Y，$Z\in H$，

$$X<Y\Rightarrow X+Z<Y+Z.$$

2）对于任何的X，Y，$Z\in H$，其中$Z>\Theta$，

$$X<Y\Rightarrow X\cdot Z<Y\cdot Z.$$

二、比　　数

现在考虑这样的序偶$(X_1,\ X_2)$，其中X_1，$X_2\in H$，且$X_2\neq\Theta$．这样的一切序偶的集合记作M．按照第二章定义自然数序偶的对等、顺序、加法和乘法的方式定义M中序偶的对等、顺序、加法和乘法．把由对等关系决定的M中的每一等价类$A=\{(X_1,\ X_2)\}$叫做一个比数．一切比数的集合记作S．用代表的小于，加法和乘法定义比数的$<_S$，$+_S$，$\cdot_S$，S连同$<$，$+$，$\cdot$（略去标记

S）具有以下性质：

1．（恒等元）比数 $O=((\Theta, U))$ 和 $I=((U, U))$ 分别是 S 的加法恒等元和乘法恒等元，即对于任何的 $A\in S$，

$$A+O=O+A=A,\quad A\cdot I=I\cdot A=A.$$

2．（交换律）对于任何的 A，$B\in S$，

$$A+B=B+A,\quad A\cdot B=B\cdot A.$$

3．（结合律）对于任何的 A，B，$C\in S$，

$$(A+B)+C=A+(B+C),\quad (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C).$$

4．（分配律）对于任何的 A，B，$C\in S$，

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C.$$

5．（消去律）1）对于任何的 A，B，$C\in S$，

$$A+C=B+C\Rightarrow A=B.$$

2）对于任何的 A，B，$C\in S$，其中 $C\neq O$，

$$A\cdot C=B\cdot C\Rightarrow A=B.$$

6．（差的存在性）对于任何的 A，$B\in S$，方程

$$B+D=A$$

有唯一解 D．定义 $D=A-B$．

7．（商的存在性）对于任何的 A，$B\in S$，其中 $B\neq O$，方程

$$B\cdot E=A$$

有唯一解 E．定义 $E=\frac{A}{B}$．

8．（顺序的三歧性与传递性）

1）对于任何的 A，$B\in S$，以下三种情形恰好有一种成立：

$$A=B,\quad A<B,\quad B<A.$$

2）对于任何的 A，B，$C\in S$，

$$A<B \text{ 且 } B<C\Rightarrow A<C.$$

9．（加法和乘法的单调性）

1）对于任何的 A，B，$C\in S$，

$$A<B\Rightarrow A+C<B+C.$$

2）对于任何的 A，B，$C\in S$，其中 $C>O$，

$$A<B\Rightarrow A\cdot C<B\cdot C.$$

三、同 构 性

可以找到一个从有理数集Q到比数集S的一个一一对应$\mathscr{F}$，使在映射$\mathscr{F}$下，Q与S关于顺序、加法和乘法同构．在这意义下，可以把比数集S同有理数集Q看成是"一样的"．

第四章　实　数

§1　引言

我们的数系从自然数集$\boldsymbol{N}$开始，经过分数集$\boldsymbol{F}$，发展到有理数集$\boldsymbol{Q}$，加减乘除四则运算的问题已经全部解决了，然而，在数的实际应用中需要考虑的问题并不止于四则运算，还需要考虑其他问题，例如测量长度的问题。以下就是这个方面的一个典型例子。设有一边长为1的正方形。如设它的对角线的长为λ（假如对角线的长存在的话），那么，按照几何学的毕达哥拉（Pythagoras）定理，必须有

$$\lambda \cdot \lambda = 2 .$$

在本节，我们将证明λ不可能是有理数。

为了简化书写，以后我们用λ^2表示数λ自乘之积$\lambda \cdot \lambda$：

$$\lambda^2 = \lambda \cdot \lambda .$$

给定正整数n。当且仅当存在一个正整数m，使$n = 2m$，我们说n是一个偶数。当且仅当$n = 1$或存在一个正整数m，使$n = 2m + 1$，我们说n是一个奇数。①

不难验证以下事实：

1）一个正整数或是奇数，或是偶数，两种可能恰好有一种成立。

2）n是奇数$\Rightarrow n^2$是奇数。

以下抛开λ是边长为1的正方形对角线长这一具体事实，

① 为了叙述方便，我们只考虑正偶数和正奇数。

而单纯考虑方程 $\lambda^2=2$。我们将证明这方程没有有理数解。

首先，0 显然不是解。其次，由于对于任何的正有理数 x，$(-x)^2=x^2$，所以如果方程$\lambda^2=2$没有正有理数解，它也不能有负有理数解。因此，只要证明方程没有正有理数解就可以了。我们用反证法证明。

设正有理数x是方程的解：

$$x^2=2.$$

由于正有理数总可表成两个正整数之商（习题88），故可设 $x=\frac{n}{m}$，其中 n，m 是正整数。这样，上面的等式可写成

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2=2. \qquad (1)$$

用$\frac{n}{m}$表示正有理数x的方式并不唯一。但根据正整数集J^+的最小数原理，在一切使等式(1)成立的正整数n中，我们可取最小的n①。

等式(1)可写成

$$\frac{n^2}{m^2}=2. \qquad (2)$$

由此得到关于正整数的等式

$$n^2=2m^2.$$

可见n^2是偶数。这样，n 必是偶数，否则由前面列出的性质1)，2)，n^2就是奇数。设$n=2j$，并代入等式(2)：

$$(2j)^2=2m^2,$$

$$2j^2=m^2.$$

---

① 即n是集合$\left\{j\in J^+ \mid 存在k\in J^+，使\left(\frac{j}{k}\right)^2=2\right\}$的最小数。

可见 m^2 是偶数，从而 m 也是偶数。设 $m=2k$，并将它连同 $n=2j$ 代入等式(1)：

$$\left(\frac{2j}{2k}\right)^2=2,$$

$$\left(\frac{j}{k}\right)^2=2.$$

这就是说，$\frac{j}{k}$可以代替$\frac{n}{m}$使等式(1)成立。但是，$j<2j=n$，这就同开始时假定的n是使（1）成立的最小正整数相矛盾。由此可见，方程$\lambda^2=2$不可能有正有理数解，从而不可能有任何有理数解。 ∎

看来，要想方程$\lambda^2=2$有解，特别是，要想使边长为1的正方形对角线具有长度，有理数已不敷应用了。①

下面再从直观上考察一下上述问题。我们知道，有理数集Q是稠密的（第三章，定理15），用几何的话说，这就是，在有理数轴（看第三章，§6）上，任何两个不同的有理点，不论相距多么近，在它们之间总有别的有理点。但是，尽管如此，有理数轴却是有"空隙"的。例如（看图6），以有理数轴的坐标原点O为心，以边长为1的正方形的对角线为半径作圆，这圆在O的右侧（在左侧也是一样）必然碰上有理数轴的一个"空隙"，就是说，它不会碰上

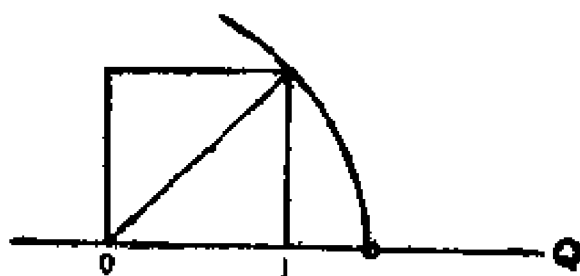


图 6

①当然，对于这个现实性很强的问题，我们只是从理论的角度得出这样的结论。在实用中，例如在工厂的图纸上，人们是用有理数$\frac{14}{10}$，$\frac{141}{100}$，$\frac{1414}{1000}$等等当作所述正方形对角线的"长度"的。

有理点，否则这正方形对角线的长就是有理数了。有理数轴上有无数多的“空隙”，这不过是其中一个例子罢了。

在本章，我们将在有理数集Q的基础上引入新的数——实数，使一切实数的集合既保留有理数集的顺序和运算性质，又不再具有“空隙”。

习　题

93 证明：一个正整数或是奇数，或是偶数，两种可能恰好有一种成立。

94．证明：如n是奇数，则n^2也是奇数。

95．证明：方程$\lambda^2=3$没有有理数解λ。

§2．实数・狄德金德分割

在第二章，我们通过自然数序偶引入了分数，一个分数指的是$P=N\times N$中的一个由对等关系决定的等价类。在第三章，我们类似地引入了有理数。每次通过序偶引入新的数，其目的是为了解决乘法或加法的逆运算问题。至于现在将要引入的实数，则是为了性质完全不同的目的——消除“空隙”。实数的引入将通过完全不同的方式。我们把有理数集Q的满足一些特定条件的子集定义为一个实数：

〔定义〕设$\xi\subset Q$，并用$\bar{\xi}=Q\setminus\xi$记ξ的余集（相对于Q）。当且仅当：

1）$\xi\neq\varnothing$且$\bar{\xi}\neq\varnothing$（即$\xi\neq Q$）；

2）对于任何的$a\in\xi$及任何的$\bar{a}\in\bar{\xi}$，$a<_Q\bar{a}$；

3）ξ没有最大的（有理）数，

我们说ξ是一个实数。

一切实数的集合记作$\mathbb{R}$。

〔定义′〕设$\xi \subset \boldsymbol{Q}$，并用$\overline{\xi}=\boldsymbol{Q}\setminus\xi$记$\xi$的余集（相对于$\boldsymbol{Q}$）。当且仅当定义中的条件1)，2)，3)都成立时，我们说$\boldsymbol{Q}$的分类$\{\xi,\overline{\xi}\}$是一个狄德金德分割，简称分割。ξ叫做这分割的下类，$\overline{\xi}$叫做这分割的上类。

在此，读者对于把有理数集$\boldsymbol{Q}$的某种类型的子集叫做实数可能感到不自然。为此，我们阐述一下定义的直观意义。比较定义和定义′，可以看出，确定一个实数ξ等于确定一个分割$\{\xi,\overline{\xi}\}$①，所以只要对分割进行阐述就可以了。在定义′中，条件1)，2)是实质性的(设立条件3)只是为推理的便利)，它们说明有理数集$\boldsymbol{Q}$被分成左右（下上）两类ξ与$\overline{\xi}$，好象有理数轴被割了一刀，切口就是ξ与$\overline{\xi}$的“分界处”（看图7）。我们考虑分割$\{\xi,\overline{\xi}\}$，而心目中想到的是这个“分界处”（后者是难以用简单明确的语言定义的）。这“分界

$$\boldsymbol{Q}=\xi\cup\overline{\xi}$$



ξ的任何元素a小于$\overline{\xi}$的任何元素$\overline{a}$

图 7

处”可能就是有理点，也可能是$\boldsymbol{Q}$的一个“空隙”（参看下面的例1，例2）。把所有的有理点（它们是本来就有的）和所有的“空隙”（它们是要补充进来的）合在一起，就是我们正在建立的实数集$\boldsymbol{R}$的直观背景。

---

① 有的书籍就把一个分割叫做一个实数．我们把分割$\{\xi,\overline{\xi}\}$的下类叫实数是为了记号上的简单．

以下是关于分割（即关于实数）的一个基本性质：

〔引理1〕设$\{\xi, \overline{\xi}\}$是一个分割：

i）如$a\in\xi$，且有理数$a_1<a$，则$a_1\in\xi$。

ii）如$\overline{a}\in\overline{\xi}$，且有理数$\overline{a_1}>\overline{a}$，则$\overline{a_1}\in\overline{\xi}$。

证 我们只证明部分i）。部分ii）的证明类似。事实上，如果$a_1\notin\xi$，则a_1属于ξ的余集：$a_1\in\overline{\xi}$。于是由定义的条件2)，$a<a_1$，这同题设的$a_1<a$矛盾。 ∎

从直观上说，引理1更加肯定一个分割确实把$\boldsymbol{Q}$分成互不交错的左右两类。

应该特别指出的是，在引理1)，i）的证明中，除用到定义中的大前提——$\overline{\xi}$是ξ的余集外，定义的三项条件只用到条件2)。现在看问题的另一方面：设$\xi\subset\boldsymbol{Q}$且$\overline{\xi}$是ξ的余集。如果ξ满足引理1的论断i），则ξ满足定义的条件2）。事实上，对于任意的$a\in\xi$及任意的$\overline{a}\in\overline{\xi}$，由于$\overline{\xi}$是$\xi$的余集，故$\overline{a}\neq a$。同时$\overline{a}$也不能小于$a$，否则由引理1，i），就有$\overline{a}\in\xi$，与$\overline{a}\in\overline{\xi}$的假设矛盾。可见只能$a<\overline{a}$，这就证明了$\xi$满足定义中的条件2)。

综合以上的讨论，可以得出结论：

〔注〕定义中的条件2)可用以下条件代替：

2)′　$a\in\xi$且$a_1<a\Rightarrow a_1\in\xi$。

条件2)′的好处在于它只考虑集合ξ中的元素，而不必牵涉到ξ的余集$\overline{\xi}$中的元素，这在某些推理过程中是方便的。

〔例1〕设$\xi=\{a\in\boldsymbol{Q}\mid a<1\}$。则$\xi$是一个实数。

请读者自己验证。注意，$\overline{\xi}=\{a\in\boldsymbol{Q}\mid a\geqq 1\}$。所以，例1中分割$\{\xi,\overline{\xi}\}$的上类$\overline{\xi}$有最小数1。

〔例 2〕设$\xi=\boldsymbol{Q}^{-}\cup\{0\}\cup\{a\in\boldsymbol{Q}^{+}|a^2<2\}$。则$\xi$是一个实数。

证 在§1已知，对于任何的$a\in\boldsymbol{Q}^{+}$，$a^2\neq2$，所以ξ的余集是

$$\overline{\xi}=\{a\in\boldsymbol{Q}^{+}|a^2>2\}.$$

以下验证ξ满足实数定义的三项条件：

1) 因$1\in\boldsymbol{Q}^{+}$且$1^2=1<2$，故$\xi\neq\varnothing$，特别是ξ的第三个子集不是空集。又因$2\in\boldsymbol{Q}^{+}$且$2^2=4>2$，故$\overline{\xi}\neq\varnothing$。

2)′ 对于任何的$a\in\xi$及$a_1<a$，如$a_1\leqq0$，则a_1已经属于ξ。故可只考虑$0<a_1<a$的情形。此时$a_1^2<a^2<2$，故a_1属于ξ的第三个子集，从而属于ξ。

3) 以下证明ξ没有最大数，正因ξ的第三个子集不是空集，我们只要证明这个子集没有最大数就可以了。对于任何的$a\in\boldsymbol{Q}^{+}$且$a^2<2$，根据正有理数集$\boldsymbol{Q}^{+}$的阿基米德性，存在正整数n，使

$$n>\frac{2a+1}{2-a^2}.$$

于是$a+\frac{1}{n}\in\boldsymbol{Q}^{+}$，且

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2=a^2+2a\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\leqq a^2+2a\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$$
$$=a^2+\frac{1}{n}(2a+1)<2,$$

即$a+\frac{1}{n}$属于ξ的第三个子集。但$a<a+\frac{1}{n}$，可见这个子集没有最大数。

注意，例2中分割$\{\xi,\overline{\xi}\}$的上类$\overline{\xi}$没有最小数。请读者自己验证。

在分割的定义（即实数的定义）中，我们已经规定下类没有最大数（条件3））。通过以上两个例子可以看出，有两种类型的分割：一种是尽管下类ξ没有最大数，但上类$\overline{\xi}$有最小数，如例1所示；一种是下类ξ既没有最大数，同时上类$\overline{\xi}$也没有最小数，如例2所示。直观地说，第一种类型反映给定的分割把有理数集Q分成左右两类时，“分界处”是个有理点；第2种类型反映的是“分界处”是个“空隙”（参看图8）。



例1示意图



例2示意图

图 8

〔定义〕当且仅当分割$\{\xi, \overline{\xi}\}$的上类$\overline{\xi}$有最小数时，我们说ξ是一个有理实数；当且仅当分割$\{\xi, \overline{\xi}\}$的上类$\overline{\xi}$没有最小数时，我们说ξ是一个无理实数。

例如，例1中的实数ξ是有理实数，例2中的实数ξ是无理实数。

最后，证明实数的一个性质，以备后面引用：

〔引理2〕对于任何的实数ξ和任何的正有理数e，存在$a \in \xi$和$\overline{a} \in \overline{\xi}$，使

$$\overline{a} - a = e.$$

定理说的是，对于任意给定的分割$\{\xi, \overline{\xi}\}$，总可在下类ξ及上类$\overline{\xi}$各取一个有理数a及$\overline{a}$，使二者之差恰好等于事先指定的正有理数e（图9）。



图 9

证 任取$a_0\in\xi$，$\overline{a_0}\in\overline{\xi}$，按正有理数集的阿基米德性，存在正整数$n_0$，使

$$n_0e>\overline{a_0}-a_0,$$
$$a_0+n_0e>\overline{a_0}$$

由引理1，$a_0+n_0e\in\overline{\xi}$。可见由正整数组成的集合

$$M=\{n\in\boldsymbol{J}^+\,|\,a_0+n_0e\in\overline{\xi}\}$$

不是空集。根据正整数集$\boldsymbol{J}^+$的最小数原理，设M的最小数为n_1。如$n_1=1$，可取$a=a_0$，$\overline{a}=a_0+e$，则$a\in\xi$，$\overline{a}=\overline{\xi}$，且$\overline{a}-a=e$。如$n_1>1$，可取$a=a_0+(n_1-1)e$，$\overline{a}=a_0+ne$，则同样有$a\in\xi$，$\overline{a}\in\overline{\xi}$，且$\overline{a}-a=e$。 ∎

例如，对于例1中的实数ξ，如$e=\dfrac{1}{10}$，可取$a=\dfrac{9}{10}$，$\overline{a}=1$；如$e=\dfrac{1}{100}$，可取$a=\dfrac{99}{100}$，$\overline{a}=1$，等等。

对于例2中的实数ξ，如$e=\dfrac{1}{10}$，可取$a=\dfrac{14}{10}$，$\overline{a}=\dfrac{15}{10}$；如$e=\dfrac{1}{100}$，可取$a=\dfrac{141}{100}$，$\overline{a}=\dfrac{142}{100}$，等等。

习　　题

96.证明§2．引理1的部分ii）．

97.验证§2．例1中的集合ξ是一个实数．

98.验证§2．例2中的上类$\overline{\xi}$没有最小数．

§3．实数的顺序

如何定义实数集$\boldsymbol{R}$中的顺序？一个很自然的想法是：当且仅当实数ξ是实数η的真子集：

$$\xi\subsetneqq\eta$$

时，定义ξ小于η（看图10）。这个条件与以下条件等价（习题99）：存在至少一个有理数c，既属于$\overline{\xi}$，又属于η。后一条件在后面的推理过程中用起来更方便一些。

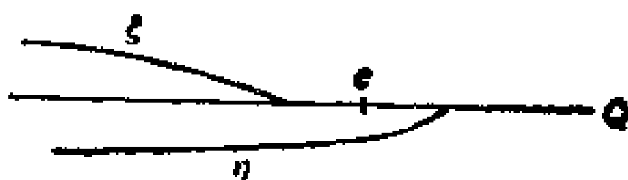


图 10

〔**定义**〕 对于任何的ξ，$\eta\in \boldsymbol{R}$，当且仅当$\overline{\xi}\cap\eta\neq\varnothing$时，说$\xi$小于$\eta$，记作$\xi<_R\eta$，也说$\eta$大于$\xi$，记作$\eta>_R\xi$。

例如，设ξ是§2，例1中的实数，η是例2中的实数。因有理数$\frac{14}{10}\in\overline{\xi}\cap\eta$，故$\xi<_R\eta$。

在不致引起混淆的情况下，我们略去$<_R$或$>_R$中的标记$\boldsymbol{R}$。

〔**定理1**〕（三歧性）对于任何的ξ，$\eta\in \boldsymbol{R}$，以下三种情形恰好有一种成立：

$$\xi=\eta,\quad \xi<\eta,\quad \eta<\xi.$$

证 对于任意的集合（不一定是实数）ξ，η来说，以下两种情形恰好有一种成立：

Ⅰ）$\xi=\eta$，　Ⅱ）$\xi\neq\eta$。

对于情形Ⅱ），以下两种情形至少有一种成立：

Ⅱ$_1$）存在$b\in\eta$，但$b\notin\xi$（即$b\in\overline{\xi}$），

Ⅱ$_2$）存在$a\in\xi$，但$a\notin\eta$（即$a\in\overline{\eta}$）。

现在证明，对于特定的集合——实数ξ，η来说，情形Ⅱ$_1$）与Ⅱ$_2$）不相容①。事实上，设情形Ⅱ$_1$）成立。那么，对于任何的$a\in\xi$，由实数定义的条件2）可知$a<b$。再由引理1，

①对于任意的集合来说，这两种情形可以同时出现。

i)，$a\in\eta$。可见此时Ⅱ₂）必不成立。于是，三种情形

$$\text{Ⅰ})\ \xi=\eta,\quad \text{Ⅱ}_1)\ \xi<\eta,\quad \text{Ⅱ}_2)\ \eta<\xi$$

恰好有一种成立。 ▮

今后如无其他的规定或声明，我们约定：用$\xi,\eta,\zeta,\lambda,\mu$这五个希腊字母来记实数。

〔**定理 2**〕（传递性）$\xi<\eta$且$\eta<\zeta\Rightarrow\xi<\zeta$。

证明留给读者。

实数0^*·正实数·负实数

在有理数集$\boldsymbol{Q}$中，我们区分了正有理数，负有理数和数0。对于实数集$\boldsymbol{R}$，也应作类似的区分。首先定义实数0^*。不难验证，负有理数集

$$\boldsymbol{Q}^-=\{a\in\boldsymbol{Q}\mid a<0\}$$

是一个实数。我们用0^*记这个实数：

$$0^*=\boldsymbol{Q}^-$$

其次，我们用顺序概念定义正负实数：

〔**定义**〕对于任何的$\xi\in\boldsymbol{R}$，

1）当且仅当$0^*<\xi$时，说ξ是一个正实数；

2）当且仅当$\xi<0^*$时，说ξ是一个负实数。

一切正实数的集合记作$\boldsymbol{R}^+$，一切负实数的集合记作$\boldsymbol{R}^-$。这样，我们有

$$\boldsymbol{R}=\{0^*\}\cup\boldsymbol{R}^+\cup\boldsymbol{R}^-。$$

〔**注**〕 按顺序的定义，不难验证：

1)′ ξ包含至少一个正有理数$\Longleftrightarrow\xi$是正实数。

2)′ $\overline{\xi}$包含至少一个负有理数$\Longleftrightarrow\xi$是负实数。

这里1)′还可用形式较简的命题代替：

① 对于任意集合来说，这两种情形可以同时出现。

1)″ $0 \in \xi \Longleftrightarrow \xi$是正实数。

习　题

99. 对于任何的实数ξ，η，试证

$$\xi \subsetneq \eta \Leftrightarrow \overline{\xi} \cap \eta \neq \varnothing.$$

100. 证明定理2。

101. 证明§3的注。

§4. 实数的加法

给定实数ξ和η。用a和b分别记属于ξ和η的任何有理数。我们将用一切可能的$a+b$组成的集合来定义ξ与η之和。首先证明这集合是个实数：

〔引理〕 对于任意的ξ，$\eta \in \boldsymbol{R}$，集合

$$\zeta = \{c \in \boldsymbol{Q} \mid 存在 a \in \xi,\ b \in \eta,\ 使 c = a +_{Q} b\}$$

是一个实数。

证　1）任取$a \in \xi$，$b \in \eta$，则$a+b \in \zeta$，故$\zeta \neq \varnothing$。任取$\overline{a} \in \overline{\xi}$，$\overline{b} \in \overline{\eta}$，则$\overline{a}$大于每个$a$，$\overline{b}$大于每个$b$，于是$\overline{a}+\overline{b}$大于每个$c \in \zeta$，故$\overline{a}+\overline{b} \notin \zeta$，即$\overline{a}+\overline{b} \in \overline{\zeta}$，从而$\overline{\zeta} \neq \varnothing$。

2）′ 对于任何的$c \in \zeta$，按定义，存在$a \in \xi$，$b \in \eta$，使$c=a+b$。对于任何的$c_1 < c = a+b$，写$c_1 = a+(c_1-a)$。由于$c_1 - a < b$，故$c_1 - a \in \eta$。于是c_1可表成$a+b$的形式，故$c_1 \in \zeta$。

3）对于任何的$c \in \zeta$，即$c=a+b$，其中$a \in \xi$，$b \in \eta$。由于ξ没有最大数，故存在$a_1 \in \xi$，$a_1 > a$。这样，$a_1 + b \in \zeta$，且$a_1 + b > c$。可见ζ没有最大数。

〔定义〕对于任意给定的ξ，$\eta \in \boldsymbol{R}$，称实数

$$\zeta = \{c \in \boldsymbol{Q} \mid 存在 a \in \xi,\ b \in \eta,\ 使 c = a +_{Q} b\}$$

为ξ与η之和，记作

$$\zeta=\xi+_R\eta.$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去 $+_R$ 中的标记 R。

〔注〕从引理的证明1)可知，对于任何的 $\bar{a}\in\bar{\xi}$，$\bar{b}\in\bar{\eta}$ 来说，$\bar{a}+\bar{b}$ 属于和数 $\zeta=\xi+\eta$ 的余集 $\bar{\zeta}$①。

〔**定理 3**〕（交换律）$\xi+\eta=\eta+\xi$。

证 按定义，

$$\xi+\eta=\{c\in\boldsymbol{Q}\mid 存在 a\in\xi,\ b\in\eta,\ 使 c=a+b\},$$

$$\eta+\xi=\{c\in\boldsymbol{Q}\mid 存在 b\in\eta,\ a\in\xi,\ 使 c=b+a\}.$$

由于对于有理数 a，b，

$$a+b=b+a,$$

所以两个集合 $\xi+\eta$，$\eta+\xi$ 相等。

〔**定理 4**〕（结合律）$(\xi+\eta)+\zeta=\xi+(\eta+\zeta)$。

证明留给读者。

〔**定理 5**〕（加法的单调性）

$$\xi<\eta\Longrightarrow\xi+\zeta<\eta+\zeta.$$

证 因 $\xi<\eta$，故可取 $\bar{a}\in\bar{\xi}\cap\eta$。又因 η 没有最大数，故可取 $b\in\eta$，使 $\bar{a}<b$。按§2的引理2，对于正有理数 $b-\bar{a}$ 及实数 ζ，可取 $c\in\zeta$，$\bar{c}\in\bar{\zeta}$，使

$$\bar{c}-c=b-\bar{a}.$$

于是

$$\bar{a}+\bar{c}=b+c.$$

由本节的注，$\bar{a}+\bar{c}\in\overline{\xi+\zeta}$，而与之相等的 $b+c\in\eta+\zeta$，所以 $\xi+\zeta<\eta+\zeta$。 ∎

①但一切 $\bar{a}+\bar{b}$ 组成的集合不一定等于 $\bar{\zeta}$，前者可能比后者少一个元素。参看习题102，103。

〔推论〕 $\xi<\eta$且$\lambda<\mu\Rightarrow\xi+\lambda<\eta+\mu$。

〔定理6〕（消去律） $\xi+\zeta=\eta+\zeta\Rightarrow\xi=\eta$。

证明留给读者。

习　　题

102. 设$\xi=\{a\in Q|a\leq 1\}\cup\{a\in Q|1<a$且$(a-1)^2<2\}$，

$\eta=\{b\in Q|b<1$ 且 $2<(1-b)^2\}$

试证：i）ξ，η是实数，且是无理的。

ii）$\xi+\eta=\{c\in Q|c<2\}$（可见$\xi+\eta$的余集$\overline{\xi+\eta}$包含2）。

iii）对于任何的$\bar{a}\in\bar{\xi}$，$\bar{b}\in\bar{\eta}$，总有$\bar{a}+\bar{b}>2$（可见由一切$\bar{a}+\bar{b}$组成的集合不包含2）。

103. 设ξ，$\eta\in R$。试证属于$\overline{\xi+\eta}$但不属于一切$\bar{a}+\bar{b}$（其中$\bar{a}\in\bar{\xi}$，$\bar{b}\in\bar{\eta}$）组成的集合的有理数不能多于一个。

104. 证明定理4。

105. 证明定理6。

§5．实数0^*·相反数·减法·绝对值

我们已经在§3定义了实数0^*：

$$0^*=Q^-。$$

0^*是实数集R的加法恒等元：

〔定理7〕 对于任何的$\xi\in R$，

$$\xi+0^*=\xi。$$

证 对于任何的$c\in\xi+0^*$，存在$a\in\xi$，$b<0$，使$c=a+b$。于是$c<a$，故$c\in\xi$。另一方面，对于任何的$a\in\xi$，由于ξ没有最大数，故可取$a_1\in\xi$，使$a<a_1$。我们可写

$$a=a_1+(a-a_1)。$$

因$a_1\in\xi$且$a-a_1<0$，故$a\in\xi+0^*$。

为了引入相反数概念，我们先证以下的引理：

〔引理 1〕 对于任何的$\xi\in \boldsymbol{R}$，方程

$$\xi+\mu=0^*$$

有唯一解μ。

证 A）唯一性。如μ，λ都是方程的解，则

$$\xi+\mu=0^*=\xi+\lambda。$$

由消去律，得

$$\mu=\lambda。$$

B）存在性。设

$\mu=\{b\in \boldsymbol{Q}\mid$ 存在$\overline{a}\in\overline{\xi}$且$\overline{a}$不是$\overline{\xi}$的最小数，使$b=-\overline{a}\}$。（图11）

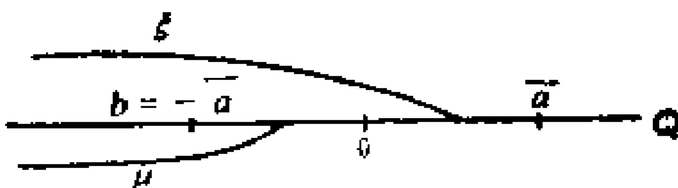


图 11

首先证明μ是一个实数：

1）任取$\overline{a}\in\overline{\xi}$，并取$\overline{a_1}>\overline{a}$，则$\overline{a_1}\in\overline{\xi}$且$a_1$不是$\overline{\xi}$的最小数，故$-\overline{a_1}\in\mu$，从而$\mu\neq\varnothing$。任取$a\in\xi$，则$a<$每个$\overline{a}\in\overline{\xi}$，即$-a>$每个$(-\overline{a})$，故$-a\notin\mu$，即$-a\in\overline{\mu}$，从而$\overline{\mu}\neq\varnothing$。

2）对于任何的$b\in\mu$来说，b等于某个$-\overline{a}$，其中$a\in\overline{\xi}$。对于任何的有理数$c<b$来说，$-c>-b=\overline{a}\in\overline{\xi}$，故$-c\in\overline{\xi}$且不是$\overline{\xi}$的最小数，所以$c\in\mu$。

3）对于任何的$b\in\mu$来说，b等于某个$-\overline{a}$，其中$\overline{a}\in\overline{\xi}$且不是$\overline{\xi}$的最小数。可取$\overline{a_1}\in\overline{\xi}$且$\overline{a_1}<\overline{a}$。按有理数集$\boldsymbol{Q}$的稠密性，再取$\overline{a_2}\in\boldsymbol{Q}$，使$\overline{a_1}<\overline{a_2}<\overline{a}$。这样就有$\overline{a_2}\in\overline{\xi}$且不是$\overline{\xi}$的最小数（不管$\overline{a_1}$是不是$\overline{\xi}$的最小数）。于是$-\overline{a_2}\in\mu$。但$-\overline{a_2}>-\overline{a}=b$，故由$b\in\mu$的任意性，知$\mu$没有最大数。

在已证μ是一个实数之后，我们证明它满足方程

$$\xi+\mu=0^*.$$

事实上，设$c\in\xi+\mu$，则存在$a\in\xi$及$\overline{a}\in\overline{\xi}$，使$c=a+(-\overline{a})$。于是$c=a-\overline{a}<0$，故$c\in0^*$。另一方面，设$c\in0^*$，则$c<0$。按§2的引理2，对于正有理数$-c$，可取$a\in\xi$，$\overline{a}\in\overline{\xi}$，使

$$\overline{a}-a=-c.$$

我们可设$\overline{a}$不是$\overline{\xi}$的最小数①。这样就可写

$$c=a+(-\overline{a}),$$

其中$a\in\xi$，$-\overline{a}\in\mu$。可见$c\in\xi+\mu$。最后得到$\xi+\mu=0^*$。∎

〔**定义**〕 对于任何的$\xi\in\boldsymbol{R}$，我们把方程

$$\xi+\mu=0^*$$

的唯一解μ叫做ξ的相反数，记作$\mu=-\xi$：

$$\xi+(-\xi)=0^*.$$

请读者证明以下定理：

〔**定理 8**〕 1）$0^*<\xi$（即$\xi\in\boldsymbol{R}^+$）$\Rightarrow-\xi<0^*$（即$-\xi\in\boldsymbol{R}^-$）。

2）$\xi<0^*$（即$\xi\in\boldsymbol{R}^-$）$\Rightarrow0^*<-\xi$（即$-\xi\in\boldsymbol{R}^+$）。

3）$\xi=0^*\Longleftrightarrow\xi=-\xi$。

定理8说明，正实数的相反数是负实数，负实数的相反数是正实数，0^*是唯一等于自己相反数的实数。

以下在相反数的基础上讲述实数的减法。这同过去稍有不同——在第三章我们是在减法的基础上讲述相反数的。应

---

①如果不然，把a及$\overline{a}$同时向右稍移一下就可以了：取$a_1\in\xi$，使$a<a_1$，并设$\overline{a_1}=\overline{a}+(a_1-a)$，于是仍有$a_1\in\xi$，$\overline{a_1}\in\overline{\xi}$，且$\overline{a_1}-a_1=\overline{a}-a=-c$，这时$\overline{a_1}$已不是$\overline{\xi}$的最小数了。

该指出．这不过是为了推理中书写上的简单，并非由于实质上的不同。

〔**引理 2**〕 对于任何的ξ，$\eta\in\boldsymbol{R}$，方程

$$\eta+\mu=\xi$$

有唯一解μ。

证 A）唯一性。由消去律。

B）存在性。设$\mu=\xi+(-\eta)$。按相反数的定义及定理7，我们有

$$\eta+\mu=\eta+(\xi+(-\eta))=(\eta+(-\eta))+\xi=0^*+\xi=\xi. \quad \blacksquare$$

〔**定义**〕 对于任何的ξ，$\eta\in\boldsymbol{R}$，我们把方程$\eta+_R\mu=\xi$的唯一解μ叫做ξ减η的差，记作$\mu=\xi-_R\eta$：

$$\eta+_R(\xi-_R\eta)=\xi.$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去$-_R$中的标记$\boldsymbol{R}$。

〔**注 1**〕 由引理 2 的证明 B），可知在$\boldsymbol{R}$中同在$\boldsymbol{Q}$中一样，减法可化成加法：

$$\xi-\eta=\xi+(-\eta).$$

〔**注 2**〕 在第三章给出的有关有理数的相反数的其他性质以及符号法则（第三章，§10的注 1，定理19及定理20）同样适用于实数，其证明也可以是逐字逐句的重复。

最后，我们考虑实数的绝对值，它的定义同有理数的情形一样：

〔**定义**〕

$$|\xi|=\begin{cases}\xi, & 当\xi>0^*,\\ 0, & 当\xi=0^*,\\ -\xi. & 当\xi<0^*.\end{cases}$$

$|\xi|$被称为实数ξ的绝对值。

〔注3〕 在第三章给出的绝对值的简单性质（第三章，§10的注3，注4，习题76）以及利用绝对值确定负数顺序的法则（第三章，定理21）与利用绝对值进行有负数参加的加法的法则（第三章，定理22）也都适用于实数，其证明可以是过去证明的逐字逐句的重复。

习 题

106. 证明定理8.

107. 证明：$\xi<\eta \Leftrightarrow -\eta<-\xi$.

108. 证明：$\xi<\eta \Leftrightarrow \xi-\eta<0^* \Leftrightarrow 0^*<\eta-\xi$.

§6. 实数的乘法

定义实数乘法比定义它们的加法要复杂。对于任意两个实数ξ，η，我们都不能象定义它们的和那样，简单地用一切可能的$a\cdot b$（其中$a\in\xi$，$b\in\eta$）组成的集合来定义$\xi\cdot\eta$。这是因为，实数ξ与η都包含绝对值任意大的负有理数，从而$a\cdot b$可以是正的并且可以任意大。这样，由一切可能的$a\cdot b$组成的集合不可能是实数，否则由实数定义中的2）就推出这集合的余集是空集，与定义中的1）矛盾。下面，我们先定义两个正实数的积。在此之前，我们将证明一个引理，以保证定义的合理性：

〔**引理**〕 对于任何的实数$\xi>0^*$，$\eta>0^*$，设

$$\zeta=\boldsymbol{Q}^-\cup\{0\}\cup A,$$

其中$A=\{c\in\boldsymbol{Q}^+ \mid 存在a\in\xi, b\in\eta, a>0, b>0, 使c=a\cdot_Q b\}$①，则$\zeta$是一实数。

---

①这里的条件“$a>0$，$b>0$”可由其他条件推出。

证 1) $\zeta\neq\varnothing$, 显然. 特别是, 因$\xi>0^*$, $\eta>0^*$, 故存在$a\in\xi$, $b\in\eta$, $a>0$, $b>0$ (§3的注), 于是$ab\in A$, 可见$A\neq\varnothing$. 任取$\bar a\in\bar\xi$, $\bar b\in\bar\eta$, 则$\bar a>0$, $\bar b>0$且$\bar a\,\bar b$大于A的每一元素, 当然更大于$\boldsymbol{Q}^-\cup\{0\}$的元素. 于是$\bar a\,\bar b\notin\zeta$, 即$\bar a\,\bar b\in\bar\zeta$, 因而$\bar\zeta\neq\varnothing$.

2) 设$c\in\zeta$, 并设$c_1<c$. 如$c_1\leqq 0$, 则由ζ的定义, $c_1\in\zeta$. 如$c_1>0$, 则$c>0$, 于是存在$a\in\xi$, $b\in\eta$, $a>0$, $b>0$, 使$c=ab$. 现在

$$c_1=\frac{c_1c}{c}=\left(\frac{c_1}{c}\cdot a\right)b.$$

因$0<c_1<c$且$a>0$, 故$0<\frac{c_1}{c}<1$且$0<\frac{c_1}{c}\cdot a<a$, 于是$\frac{c_1}{c}\cdot a\in\xi$, 从而$c_1\in A\subset\zeta$.

3) 最后证明ζ没有最大数, 由于$A\neq\varnothing$, 这只要证明A没有最大数就可以了. 对于任意的$c\in A$, 存在$a\in\xi$, $b\in\eta$, $a>0$, $b>0$, 使$c=ab$. 因ξ没有最大数, 故可取$a_1\in\xi$, $a<a_1$. 这样就有$a_1b\in A$, 且$c=ab<a_1b$. 可见ζ没有最大数.

〔**定义 1**〕 对于任何的实数$\xi>0^*$, $\eta>0^*$, 称实数

$\zeta=\boldsymbol{Q}^-\cup\{0\}\cup\{c\in\boldsymbol{Q}^+\mid$存在$a\in\xi$, $b\in\eta$, $a>0$, $b>0$, 使$c=a\cdot_{Q}b\}$为ξ与η的积, 记作

$$\zeta=\xi\cdot_R\eta.$$

〔**注 1**〕 从引理的证明 1) 可知, 对于任何的$\bar a\in\bar\xi$, $\bar b\in\bar\eta$来说, $\bar a\,\bar b$属于$\zeta=\xi\cdot_R\eta$的余集$\bar\zeta$①.

①但一切$\bar a\,\bar b$组成的集合不一定等于$\bar\zeta$, 前者比后者可能少一个元素. 参看习题109, 110.

〔注 2〕 同样从引理的证明 1）可知，对于$\xi>0^*$，$\eta>0^*$，总有$\xi\cdot_R\eta>0^*$，即两正实数之积总是正实数。

现在，以正实数之积的定义为基础，我们按照中学代数中的规定，定义两乘数不全为正时的积：

〔定义 2〕 对于任意的不全为正的实数ξ，η，规定：

$$\xi\cdot_R\eta=\begin{cases}0^*, & \text{当}\xi=0^*\text{或}\eta=0^*,\\ |\xi|\cdot_R|\eta|, & \text{当}\xi<0^*\text{且}\eta<0^*,\\ -(|\xi|\cdot_R|\eta|), & \text{当}\xi>0^*\text{且}\eta<0^*,\\ & \text{或}\xi<0^*\text{且}\eta>0^*.\end{cases}$$

现在，对于任何的ξ，$\eta\in\boldsymbol{R}$，积$\xi\cdot_R\eta$都有了定义。在不致引起混淆的情况下，我们略去$\cdot_R$中的标记$\boldsymbol{R}$，有时连$\cdot$也略去。

注意，对于有理数已证的公式$a\cdot0=0$（第三章，定理23）以及利用绝对值进行有负数参加的乘法的法则（第三章，定理26），对于实数来说，在这里都是定义。

〔定理 9〕 （交换律）$\xi\eta=\eta\xi$.

证 1）设$\xi>0^*$，$\eta>0^*$. 证法与定理 3 的证明类似。

2）设$\xi=0^*$或$\eta=0^*$. 这时由定义 2，

$$\xi\eta=0^*=\eta\xi.$$

3）设$\xi<0^*$且$\eta<0^*$. 则由定义 2 及上面的部分1），

$$\xi\eta=|\xi|\cdot|\eta|=|\eta|\cdot|\xi|=\eta\xi.$$

4）设$\xi>0^*$，$\eta<0^*$或$\xi<0^*$，$\eta>0^*$. 同样由定义 2 及上面的部分1），

$$\xi\eta=-(|\xi|\cdot|\eta|)=-(|\eta|\cdot|\xi|)=\eta\xi.$$

〔定理10〕 （结合律）$(\xi\eta)\zeta=\xi(\eta\zeta)$.

证明留给读者。

〔定理11〕 （分配律）$\xi(\eta+\zeta)=\xi\eta+\xi\zeta$。

证 1）设$\xi>0^*$，$\eta>0^*$，$\zeta>0^*$。此时，

$$\xi(\eta+\zeta)=\boldsymbol{Q}^-\cup\{0\}\cup A,$$

其中

$A=\{d\in\boldsymbol{Q}^+\mid$存在$a\in\xi$，$b\in\eta$，$c\in\zeta$，$a>0$，$b+c>0$，使$d=a(b+c)\}$。我们可设条件中的$b$，$c$全为正：①

$$b>0,\quad c>0.$$

另一方面，可以证明（习题113），

$$\xi\eta+\xi\zeta=\boldsymbol{Q}^-\cup\{0\}\cup B,$$

其中

$$B=\{e\in\boldsymbol{Q}^+\mid\text{存在}a,\ a_1\in\xi,\ b\in\eta,\ c\in\zeta,\ a>0,\ a_1>0,\ b>0,\ c>0,\ \text{使}e=ab+a_1c\}.$$

这里，集合$\boldsymbol{Q}^-\cup\{0\}$分别与$A$，$B$不相交，因此，要想证明定理中的等式，只要证明$A=B$就可以了。事实上，对于有理数来说，我们有

$$a(b+c)=ab+ac,$$

故$A\subset B$。另一方面，

$$ab+a_1c=a\left(b+\frac{a_1}{a}c\right)$$

$$=a_1\left(\frac{a}{a_1}b+c\right).$$

如$0<a_1\leqq a$，则$0<\frac{a_1}{a}c\leqq c$，从而$\frac{a_1}{a}c\in\zeta$，于是$ab+a_1c\in A$。如$0<a\leqq a_1$，也可推出同样结论。故$B\subset A$。最后得到$A=B$，从而定理中的等式成立。

①如果，例如，$b>0$，$c\leqq0$，而$b+c>0$，则因$\zeta>0^*$，不难证明（习题112），存在$c_1\in\zeta$，使$0<c_1<b+c$。设$b_1=(b+c)-c_1$，则$b_1+c_1=b+c$，并且$b_1<b$，从而$b_1\in\eta$且$b_1>0$。

Ⅱ）设ξ，η，ζ中至少有一为零。此时定理中的等式显然成立。

Ⅲ）设ξ，η，ζ中至少有一为负。这又分以下情形：

i）$\xi>0^*$，$\eta<0^*$，$\zeta<0^*$。此时由定义2及部分Ⅰ）的结果，我们有

$$\xi(\eta+\zeta)=-(\xi|\eta+\zeta|)=-(\xi(|\eta|+|\zeta|))$$
$$=-(\xi|\eta|+\xi|\zeta|)=(-\xi|\eta|)+(-\xi|\zeta|)$$
$$=\xi\eta+\xi\zeta.$$

ii）$\xi>0^*$，$\eta>0^*$，$\zeta<0^*$。

如$\eta+\zeta\geqq 0^*$，则因

$$\eta=(\eta+\zeta)+(-\zeta)=(\eta+\zeta)+|\zeta|,$$

故由部分Ⅰ），Ⅱ）的结论及定义2，

$$\xi\eta=\xi(\eta+\zeta)+\xi|\zeta|=\xi(\eta+\zeta)+(-\xi\zeta).$$

于是

$$\xi(\eta+\zeta)=\xi\eta+\xi\zeta.$$

如$\eta+\zeta<0^*$，则因

$$|\eta+\zeta|+\eta=-(\eta+\zeta)+\eta=-\zeta=|\zeta|,$$

故由Ⅰ），

$$\xi|\eta+\zeta|+\xi\eta=\xi|\zeta|.$$

由定义2，

$$-\xi(\eta+\zeta)+\xi\eta=-\xi\zeta.$$

于是同样有

$$\xi(\eta+\zeta)=\xi\eta+\xi\zeta.$$

iii）$\xi>0^*$，$\eta<0^*$，$\zeta>0^*$。此时把ii）中的η，ζ互换就可以了。

iv）$\xi<0^*$。此时不论η，ζ为正，为负，或为零，永远有

$$\xi(\eta+\zeta)=-(|\xi|(\eta+\zeta)).$$

于是应用上面各项结论及定义 2，仍可推出定理中的等式。

〔**定理12**〕 （乘法的单调性）设 $\xi<\eta$：

1）如 $\zeta>0^*$，则 $\xi\zeta<\eta\zeta$；

2）如 $\zeta<0^*$，则 $\eta\zeta<\xi\zeta$；

3）如 $\zeta=0^*$，则 $\xi\zeta=\eta\zeta=0^*$。

证 1）设 $\zeta>0^*$。因 $\xi<\eta$，故 $\xi-\eta<0^*$（习题108）。于是由定义 2，

$$(\xi-\eta)\zeta<0^*.$$

根据与习题79相应的实数的公式，可得

$$\xi\zeta-\eta\zeta<0^*.$$

所以（习题108），

$$\xi\zeta<\eta\zeta.$$

2）设 $\zeta<0^*$。证法类似。①

3）设 $\zeta=0^*$。结论显然。

〔**定理13**〕 （消去律）$\xi\zeta=\eta\zeta$ 且 $\zeta\neq0^*\Rightarrow\xi=\eta$。

证明留给读者。

〔**注**〕关于有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 的无零因子性（第三章，定理24），乘法的符号法则（第三章，定理25），乘法与减法相联系的公式（习题79）以及积的绝对值公式（习题80），对于实数集 $\boldsymbol{R}$ 都适用，其证明也可以是过去证明的逐字逐句的重复。

习　　题

109. 设 $\xi=\boldsymbol{Q}^-\cup\{0\}\cup\{a\in Q^+|a^2<2\}$，

$\eta=\boldsymbol{Q}^-\cup\{0\}\cup\{b\in Q^+|b^2<\frac{1}{2}\}$。

---

①当然，也可用 1）的结果及习题107证明。

试证：i) ξ，η是实数，且是无理的。

ii) $\xi\eta=\{c\in Q\,|\,c<1\}$（可见$\xi\eta$的余集$\overline{\xi\eta}$包含1）。

iii) 对于任何的$\bar{a}\in\bar{\xi}$，$\bar{b}\in\bar{\eta}$，总有$\bar{a}\,\bar{b}>1$（可见由一切$\bar{a}\,\bar{b}$组成的集合不包含1）。

110. 设ξ，$\eta\in R^+$。试证属于$\overline{\xi\eta}$但不属于一切$\bar{a}\,\bar{b}$（其中$\bar{a}\in\bar{\xi}$，$\bar{b}\in\bar{\eta}$）组成的集合的有理数不能多于一个。

111. 证明定理10。

112. 设$\xi\in R^+$，并设$d\in Q^+$。试证存在$c\in\xi$，使$0<c<d$。

113. 证明定理11的证明I)中的等式

$$\xi\eta+\xi\zeta=Q^-\cup\{0\}\cup B.$$

114. 证明定理13。

§7. 实数1^*·倒数·除法

我们把§2，例1中的实数记作1^*：

$$1^*=\{a\in Q\,|\,a<1\}.$$

1^*是实数集R的乘法恒等元：

〔**定理14**〕 对于任何的$\xi\in R$，

$$\xi\cdot1^*=\xi.$$

证 1）设$\xi>0^*$。此时

$$\xi\cdot1^*=Q^-\cup\{0\}\cup A,$$

其中

$A=\{c\in Q^+\,|\,$存在$a\in\xi$，$a>0$及$b\in Q$，$0<b<1$，使$c=ab\}$。同时，ξ也可表成类似形式：

$$\xi=Q^-\cup\{0\}\cup B,$$

其中

$$B=\{a\in Q^+\,|\,a\in\xi\}.$$

因此，只要证明$A=B$就可以了。对于任何的$c\in A$，存在

$\in\xi$，$c>0$及$0<b<1$，使$c=ab$。于是$0<c=ab<a$，故$\in\xi$且$c>0$，可见$c\in B$。另一方面，对于任何的$a\in B$，我们有$a\in\xi$且$a>0$。任取$a_1\in\xi$且$a<a_1$，则$0<\frac{a}{a_1}<1$。现在，可写$a=a_1\left(\frac{a}{a_1}\right)$。由此可见$a\in A$。这就证明了$A=B$，从而$\xi\cdot1^*=\xi$。

2）设$\xi=0^*$。则由乘法定义2，有$0^*\cdot1^*=0^*$。

3）设$\xi<0^*$。则由乘法定义2及部分1）的结果，我们有

$$\xi\cdot1^*=-(|\xi|\cdot1^*)=-|\xi|=\xi.$$

为了引入倒数概念，我们先证以下两个引理：

〔**引理1**〕 对于$\xi>0^*$，设

$$\mu=\boldsymbol{Q}^-\cup\{0\}\cup A,$$

其中

$$A=\{b\in\boldsymbol{Q}^+|\text{存在}\bar{a}\in\xi\text{且}\bar{a}\text{不是}\xi\text{的最小数，使}b=\frac{1}{\bar{a}}\},$$

则μ是一个实数（参看图12）。

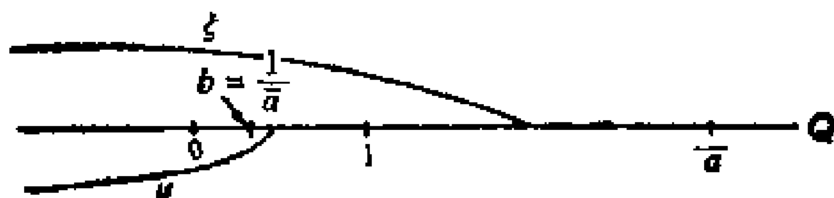


图 12

证 1）任取$\bar{a}\in\xi$，并取$\bar{a}_1>\bar{a}$，则$\bar{a}_1\in\xi$且不是ξ的最小数，可见$\frac{1}{\bar{a}_1}\in A$。故$A\neq\varnothing$，更加$\mu\neq\varnothing$。其次，

因$\xi>0^*$，故可取$a\in\xi$且$a>0$。于是$0<a<$每个$\overline{a}\in\overline{\xi}$，从而$\frac{1}{a}>$每个$\frac{1}{\overline{a}}$，故$\frac{1}{a}\notin\mu$，即$\frac{1}{a}\in\overline{\mu}$，故$\overline{\mu}\neq\varnothing$。

2)′ 对于任何的$b\in\mu$及任何的有理数$b_1<b$。如$b_1\leqq 0$，则b_1已属于μ；如$b_1>0$，则$b>0$，从而$b\in A$，于是存在$\overline{a}\in\overline{\xi}$，使$b=\frac{1}{\overline{a}}$。此时如令$d=\frac{1}{b_1}$，则由$0<b_1<b$推出$d>\overline{a}$。可见$d\in\overline{\xi}$且不是$\overline{\xi}$的最小数，于是$b_1=\frac{1}{d}\in A\subset\mu$。

3) 以下证明μ没有最大数。由于$A\neq\varnothing$，这只要证明A没有最大数就可以了。对于任何的$b\in A$，存在$\overline{a}\in\overline{\xi}$且不是$\overline{\xi}$的最小数，使$b=\frac{1}{\overline{a}}$。在$\overline{\xi}$中，取$\overline{a_1}<\overline{a}$。按有理数集$\boldsymbol{Q}$的稠密性，再取有理数$\overline{a_2}$，使$\overline{a_1}<\overline{a_2}<\overline{a}$。这样，$\overline{a_2}\in\overline{\xi}$且不是$\overline{\xi}$的最小数。于是$\frac{1}{\overline{a_2}}\in A$。但$0<b=\frac{1}{\overline{a}}<\frac{1}{\overline{a_2}}$，故由$b\in A$的任意性，知$A$没有最大数。∎

〔引理2〕 对于任何的$\xi\neq0^*$，方程

$$\xi\mu=1^*$$

有唯一解μ。

证 A) 唯一性。根据乘法消去律。

B) 存在性。1) 设$\xi>0^*$。我们证明引理1中的实数μ是方程的解。事实上，

$$\xi\mu=\boldsymbol{Q}^-\cup\{0\}\cup B,$$

其中

$$B=\{b\in\boldsymbol{Q}^+\mid \text{存在}a\in\xi\text{且}a>0\text{及}\overline{a}\in\overline{\xi}\text{且}\overline{a}\text{不是}\overline{\xi}\text{的最小数，使}b=a\cdot\frac{1}{\overline{a}}\}。$$

同时，1^*可表示成：

$$1^* = \boldsymbol{Q}^- \cup \{0\} \cup C,$$

其中

$$C = \{c \in \boldsymbol{Q}^+ \mid c < 1\}.$$

因此，只要证明 $B = C$，就可证实$\xi\mu = 1^*$。事实上，对于任何的$b \in B$，存在$a \in \xi$，$a > 0$及$\overline{a} \in \overline{\xi}$，使 $b = a \cdot \frac{1}{\overline{a}}$。因 $0 < a < \overline{a}$，故$0 < b < 1$，可见 $b \in C$。另一方面，对于任何的$c \in C$，我们有 $0 < c < 1$。为了证明$c \in B$，只要能够找到一个$d \in \xi$，$d > 0$，使 $\frac{d}{c} \in \overline{\xi}$ 且不是$\overline{\xi}$的最小数就可以了。因为，如能作到这一步，我们就有$c = d \cdot \frac{1}{\frac{d}{c}} \in B$。现在，任取一个$a \in \xi$，$a > 0$作为出发点。由§2的引理2，对于正有理数 $a - ac$，存在$d \in \xi$，$\overline{d} \in \overline{\xi}$，使

$$\overline{d} - d = a - ac. \tag{1}$$

这里ξ的元素$d = (\overline{d} - a) + ac$仍旧大于0。此外，因$1 - c > 0$，故由等式(1)，

$$\overline{d} - d = a(1 - c) < \overline{d}(1 - c) = \overline{d} - \overline{d}c.$$

于是

$$-d < -\overline{d}c,$$

$$\overline{d}c < d$$

$$\overline{d} < \frac{d}{c}.$$

可见$\frac{d}{c} \in \overline{\xi}$且不是$\overline{\xi}$的最小数。这就是说$d \in \xi$符合上面提出的要求，从而证明了$c \in B$。最后得到 $B = C$，于是$\xi\mu = 1^*$。

2）设$\xi<0^*$，此时$|\xi|>0^*$。设μ_1是在部分1）中以$|\xi|$代替ξ而得到的解：

$$|\xi|\mu_1=1^*.$$

因$\xi<0^*$，$-\mu_1<0$，故由乘法的定义2，

$$\xi(-\mu_1)=|\xi|\cdot|-\mu_1|=|\xi|\mu_1=1^*.$$

可见$\mu=-\mu_1$是方程的解。

〔**定义**〕 对于任何的$\xi\neq 0^*$，我们把方程$\xi\mu=1^*$的唯一解μ叫做$\xi\neq 0^*$的倒数，记作$\mu=\xi^{-1}$：

$$\xi\xi^{-1}=1^*.$$

现在，以倒数概念为基础，讨论实数的除法。

〔**引理 3**〕 对于任何的实数ξ及任何的实数$\eta\neq 0^*$，方程

$$\eta\mu=\xi$$

有唯一解μ；并且，当$\xi\neq 0^*$且$\eta=0^*$时，方程无解；当$\xi=\eta=0^*$时，任何实数μ是方程的解。

证 A）当$\eta\neq 0^*$时，解的唯一性显然。

B）设$\eta\neq 0^*$，则$\mu=\xi\eta^{-1}$是方程的解。

C）定理中剩下部分的证明同第三章，§12，引理的证明C）一样。 ▮

〔**定义**〕 对于任何的实数ξ及任何的实数$\eta\neq 0^*$，我们把方程$\eta\cdot_R\mu=\xi$的唯一解μ叫做ξ除以$\eta\neq 0^*$的商，记以$\mu=\frac{\xi}{\eta}{}_R$：

$$\eta\cdot_R\left(\frac{\xi}{\eta}{}_R\right)=\xi.$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去$-_R$中的标记$\boldsymbol{R}$。

〔**注 1**〕 把以上关于倒数和商的两个定义结合起来，我们有

$$\xi^{-1}=\frac{1^*}{\xi} \qquad (\xi\neq 0^*).$$

并且由引理 3 的证明 B），可得

$$\frac{\xi}{\eta}=\xi\eta^{-1}=\xi\left(\frac{1^*}{\eta}\right) \qquad (\eta\neq 0^*)$$

这公式把实数的除法化为乘法。

〔**注 2**〕 关于有理数的商的基本公式（第三章，§12的注），除法的符号法则（习题81），商的绝对值的公式（习题82），以及关于有理数的倒数的一些公式（第三章，§13，注 2，其中把有理数 +1 换成实数 1^*），对于实数都成立，其证明也可以是逐字逐句的重复。

§8. 有理实数·有理数集嵌入实数集

早在 § 2，我们已定义了有理实数，这就是其余集有最小数的实数。以下的引理给出有理数和有理实数之间的基本关联：

〔**引理 1**〕 ξ 是有理实数 $\Longleftrightarrow$ 存在有理数 a，使 $\xi=\{b\in\mathbf{Q}\,|\,b<a\}$。

证 1） “$\Rightarrow$”. 设 ξ 是有理实数，并设 $\overline{\xi}$ 的最小数是 a。对于任何的 $b\in\xi$，有 $b<a$。另一方面，对于任何的有理数 $b<a$，因 a 是 $\overline{\xi}$ 的最小数，故 $b\notin\overline{\xi}$，所以 $b\in\xi$。

2） “$\Leftarrow$”. 对于有理数 a，设 $\xi=\{b\in\mathbf{Q}\,|\,b<a\}$. 不难验证 ξ 是一个实数。同时，不难看出，a 是 $\overline{\xi}$ 的最小数。

今后，对于有理数 a，我们将用 a^* 记引理 1 中的有理实

数：

$$a^* = \{b \in \boldsymbol{Q} \mid b < a\}.$$

例如，

$$0^* = \{b \in \boldsymbol{Q} \mid b < 0\} = \boldsymbol{Q}^-,$$

$$1^* = \{b \in \boldsymbol{Q} \mid b < 1\},$$

这同§3与§7中的记法是一致的。

我们用$\boldsymbol{Q}^*$记一切有理实数的集合。

回忆§2的阐述：我们是用狄德金德分割把有理集$\boldsymbol{Q}$分成左右两类而引入实数的，其中左类即下类被称为实数。但我们心目中的实数则是左右两类有理数之间的"分界处"。不过，这只能是一种直观的想法，因为实数和有理数属于不同的数的系统，不能比较它们的大小。现在，引理1明确了有理实数（它们是实数的特殊情形）与有理数的关联，我们就可以把上述直观想法确切化了。

〔**引理2**〕 对于任何的$\xi \in \boldsymbol{R}$及任何的$a \in \boldsymbol{Q}$：

1）$a \in \xi \Longleftrightarrow a^* < \xi$，

2）$a \in \overline{\xi} \Longleftrightarrow \xi \leqq a^*$.

引理说明，分割$\{\xi, \overline{\xi}\}$的下类中的有理数所对应的有理实数都小于实数ξ；其上类中的有理数所对应的有理实数都大于或等于实数ξ。

证 1）设$a \in \xi$。按a^*的定义，它是由一切小于a的有理数所组成，故$a \notin a^*$，即$a \in \overline{a^*}$。由此可见$a \in \overline{a^*} \cap \xi$，故$a^* < \xi$。另一方面，设$a^* < \xi$，即存在$b \in \overline{a^*} \cap \xi$。因$b \in \overline{a^*}$，故$b \notin a^*$，这就是说，$b$不是小于$a$的有理数，即$a \leqq b$。由这不等式并由$b \in \xi$，可知$a \in \xi$。

2）由于$a \in \overline{\xi}$与$a \notin \xi$有相同的意义，$\xi \leq a^*$与a^*不小于ξ有相同的意义，故1），2）具有相同意义。

〔注〕 当ξ是有理实数且a是$\overline{\xi}$的最小数时，引理2，2）中的等号成立。对于无理实数ξ，等号永不成立。

在第二章，§13，我们曾把自然数集$\boldsymbol{N}$关于顺序，加法和乘法同构地嵌入分数集$\boldsymbol{F}$。然后在第三章，§14，又把分数集$\boldsymbol{F}$关于顺序，加法和乘法同构地嵌入有理数集$\boldsymbol{Q}$。下面，我们将利用一个映射，把有理数集$\boldsymbol{Q}$关于顺序，加法和乘法同构地嵌入实数集$\boldsymbol{R}$。在这样的意义下，就可把实数集$\boldsymbol{R}$看成是有理数集$\boldsymbol{Q}$的一个扩充。这个准备利用的映射就是由上面的 * 所确定的关系。

〔**定理15_1**〕 设$(\ )^*: \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}$，其中

$$a^* = \{b \in \boldsymbol{Q} \mid b < a\},$$

则$(\ )^*$是单射，且$\boldsymbol{Q}$的象就是有理实数集$\boldsymbol{Q}^*$，这就是说，$(\ )^*$是从$\boldsymbol{Q}$到$\boldsymbol{Q}^* \subset \boldsymbol{R}$的一个一一对应。

证 1）设$a_1 \neq a_2$。例如，设$a_1 < a_2$，则按$a_1{}^*$与$a_2{}^*$的定义，$a_1 \in \overline{a_1{}^*} \cap a_2{}^*$，故$a_1{}^* < a_2{}^*$。可见$(\ )^*$是单射。

2）引理1已证实$\boldsymbol{Q}$的象就是有理实数集$\boldsymbol{Q}^*$。

〔**定理15_2**〕 $a_1 <_Q a_2 \Longleftrightarrow a_1{}^* <_R a_2{}^*$。

证 定理15_1的证明1)已经证实"⇒"部分。又因$<_Q$与$<_R$都具有三歧性，所以"⇐"部分与"⇒"是等价的。∎

在此，我们暂时停止理论推演而作些直观解释，并说明如何构造实数轴。按§2的定义，一个实数是由某些有理数组成的一个特殊类型的集合，因而一个实数的图象应该是有理数轴上一个特殊类型的点集（参看图8中由ξ标出的部

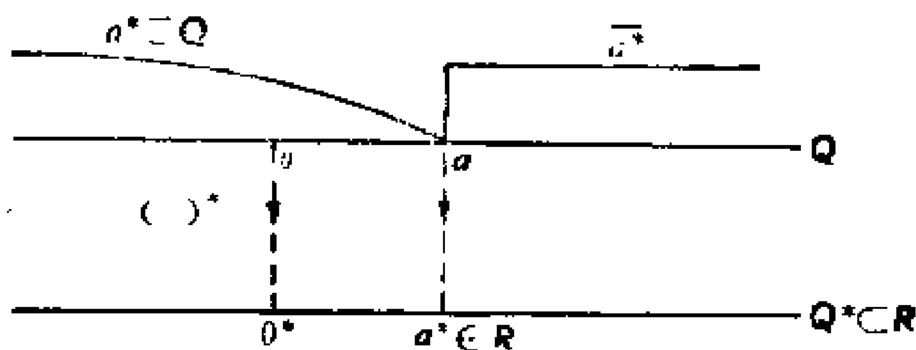


图 13

分）。为了使实数的图象单一化，我们准备把一个实数的图象看成直线上一个点：1）先看有理实数。定理15_{1-2}告诉我们，通过映射（　）*，有理数集$\boldsymbol{Q}$保持原来的顺序被映射为有理实数集$\boldsymbol{Q}^*\subset\boldsymbol{R}$。直观上可以这样看：把有理数轴所在的直线叠放在我们准备构造的实数轴所在的直线上，有理点就变成我们需要的有理实数点（图13）。2）有了有理实数点，再看怎样确定无理实数点。设ξ是一个无理实数，引理2及其注说明，对于任何的$b\in\xi$以及任何的$\overline{b}\in\overline{\xi}$，总有$b^*<\xi<\overline{b}^*$。直观地说，无理实数点$\xi$就是介乎一切有理实数点$b^*$与一切有理实数点$\overline{b}^*$之间的那个点（图14）。

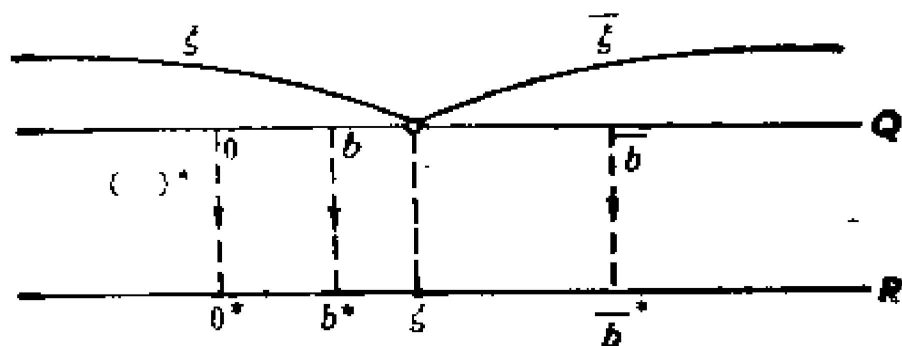


图 14

这样构成的一切有理实数点和一切无理实数点合组的点

集叫做实数轴。应该指出，我们过去在第二章，§6构造分数轴（图4）以及在第三章，§6构造有理数轴（图5）时，采用的都是机械式的方法。现在，在构造实数轴，特别是确定无理实数点的位置时，采用的只能是描述式的方法。我们没有统一的机械式的方法去确定无理实数点的位置。

〔**定理15$_3$**〕 $(a_1 +_Q a_2)^* = a_1^* +_R a_2^*$。

证 1）设$b \in (a_1 + a_2)^*$，即$b < a_1 + a_2$，亦即$b - a_2 < a_1$。按有理数集$\boldsymbol{Q}$的稠密性，取$c \in \boldsymbol{Q}$，使

$$b - a_2 < c < a_1,$$

设$d = b - c$，则

$$0 < d < a_2.$$

于是

$$b = c + d,$$

其中$c \in a_1^*$，$d \in a_2^*$，可见$b \in a_1^* + a_2^*$。

2）设$b \in a_1^* + a_2^*$，则存在$c \in a_1^*$，即$c < a_1$，及$d \in a_2^*$，即$d < a_2$，使$b = c + d$。这样就有$b < a_1 + a_2$，即$b \in (a_1 + a_1)^*$。

〔**定理15$_4$**〕 $(a_1 \cdot_Q a_2)^* = a_1^* \cdot_R a_2^*$。

可分四种情形证明：1）a_1，a_2至少有一为0；2）$a_1 > 0$，$a_2 > 0$；3）a_1，a_2一正一负；4）$a_1 < 0$，$a_2 < 0$。情形1）是显然的。情形2）的证明需要一些技巧。对于情形3），不妨引用2）的结果，以及符号法则和公式

$$(-a)^* = -a^*$$

（习题115）。情形4）的证明与此类似。请读者补出证明的细节。

按照定理15$_{1-4}$的意义，我们说：

在映射$(\ \ )^*$下，关于$<_Q$与$<_R$，$+_Q$与$+_R$，$\cdot_Q$与$\cdot_R$，有理数集$\mathbf{Q}$与有理实数集$\mathbf{Q}^*\subset\mathbf{R}$同构。或说，关于$<_Q$与$<_R$，$+_Q$与$+_R$，$\cdot_Q$与$\cdot_R$，$\mathbf{Q}$被同构地嵌入$\mathbf{Q}$。

在这样的意义下，我们可以把$\mathbf{Q}$同$\mathbf{Q}^*$看成是“一样的”。

习　　题

115. 证明：$(-a)^*=-a^*$.
116. 证明定理15_2.
117. 证明：$(a_1-_Qa_2)^*=a_1^*-_Ra_2^*$.
118. 对于$a_2\neq0$，证明$\left(\frac{a_1}{a_2}{}_Q\right)^*=\frac{a_1^*}{a_2^*}{}_R$.

§9. 整实数·正整实数集代替正整数集

按照第三章，§16的约定，我们用n，m，l，k，j五个英文字母记正整数，用$-n$，$-m$，$-l$，$-k$，$-j$记相应的负整数。

〔**定义**〕 形如n^*的有理实数叫正整实数。形如$(-n)^*=-n^*$①的有理实数叫负整实数。正整实数，负整实数和0^*统称为整实数。

一切正整实数的集合记作$\mathbf{Z}^+$，一切负整实数的集合记作$\mathbf{Z}^-$，一切整实数的集合记作$\mathbf{Z}$：

$$\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^+\cup\mathbf{Z}^-\cup\{0^*\}.$$

我们指出：

在映射$(\ \ )^*$下，正整数集$\mathbf{J}^+\subset\mathbf{Q}$与正整实数集$\mathbf{Z}^+\subset\mathbf{R}$关于顺序，加法和乘法同构。

①看习题115.

理由同第三章，§16中相应问题的理由一样。

〔**定理16**〕 在$\boldsymbol{Z}^+$中，用1^*代替自然数集$\boldsymbol{N}$中的1，并如下定义后继映射 $(\ \ )^{+_{Z^+}}: \boldsymbol{Z}^+\to\boldsymbol{Z}^+$：

$$(n^*)^{+_{Z^+}}=(n^+)^*$$

（叫做n^*的后继者），则$\boldsymbol{Z}^+$满足$\boldsymbol{N}$的裴阿诺公理。

〔**定理17**〕 正整实数的加法，乘法和顺序分别满足自然数的加法，乘法和顺序的定义。

以上两个定理的证明留给读者。

由这两个定理可以断定，正整实数集$\boldsymbol{Z}^+$具有第一章中关于自然数集$\boldsymbol{N}$的一切性质。这样，作为实数集$\boldsymbol{R}$的子集，正整实数集$\boldsymbol{Z}^+$就可以代替正整数集$\boldsymbol{J}^+$（它已在第三章，§16代替了整数集$\boldsymbol{W}$，而后者又已在第二章，§14代替了自然数集$\boldsymbol{N}$），而在$\boldsymbol{R}$的内部继续起着自然数集$\boldsymbol{N}$的作用。

习　　题

119．证明定理16。

120．证明定理17。

121．证明任一正有理实数可以表成两个正整实数之商（参看习题88）。

§10．实数集的稠密性·正实数集的阿基米德性

同分数集$\boldsymbol{F}$和有理数集$\boldsymbol{Q}$一样，实数集$\boldsymbol{R}$具有稠密性，即任何两个不同的实数ξ，η之间总存在另外的实数ζ。在讲过实数的加法和除法之后，这是极易验证的，例如，可取$\zeta=\dfrac{\xi+\eta}{2^*}$。不过，为了后面引用的目的，我们将证明，在$\xi$，$\eta$之间不止是一般存在实数，而是必存在有理实数。

〔**定理18**〕（稠密性）对于任何的实数$\xi<\eta$，总存在有理实数b^*，使

$$\xi<b^*<\eta.$$

证 因$\xi<\eta$，故可取有理数$c\in\overline{\xi}\cap\eta$。因$\eta$没有最大数，故可再取$b\in\eta$，使$b>c$。由定理$15_2$，$c^*<b^*$。按§8．引理2，由$c\in\overline{\xi}$推出$\xi\leqq c^*<b^*$；由$b\in\eta$推出$b^*<\eta$。 ■

同分数集$\boldsymbol{F}$和正有理数集$\boldsymbol{Q}^+$一样，正实数集$\boldsymbol{R}^+$具有阿基米德性：

〔**定理19**〕（**阿基米德性**）对于任何的$\xi\in\boldsymbol{R}^+$，总存在$n^*\in\boldsymbol{Z}^+$，使$\xi<n^*$。

证 任取$c\in\overline{\xi}$，则$\xi\leqq c^*$。因ξ是正实数，故c必是正有理数。按正有理数$\boldsymbol{Q}^+$阿基米德性，对于c，存在正整数n，使$c<n$。于是$c^*<n^*$，从而$\xi<n^*$。 ■

〔**推论**〕对于任何的$\xi,\eta\in\boldsymbol{R}^+$，存在$n^*\in\boldsymbol{Z}^+$，使$\xi<n^*\eta$。

这只要在定理19中用正实数$\dfrac{\xi}{\eta}$代替ξ就可以了。

〔**定理20**〕 实数集$\boldsymbol{R}$没有最大数，特别是，对于任何的$\xi\in\boldsymbol{R}$，存在大于ξ的有理实数。

证 对于正实数ξ来说，定理19已保证结论成立。对于负实数或0^*来说，不妨取1^*担任所需的有理实数的角色。 ■

〔**定理21**〕 实数集$\boldsymbol{R}$没有最小数，特别是，对于任何的$\xi\in\boldsymbol{R}$，存在小于ξ的有理实数。

只要在定理20中用$-\xi$代替ξ，就可推出我们的结论。

习　题

122. 试证 $\lim \frac{1}{n^*}=0^*$，即对于任何的 $\varepsilon\in R^+$，存在 $n_0\in N$，使对于一切的 $n>n_0$，总有 $\frac{1}{n^*}<\varepsilon$. 由此可略见阿基米德性在微积分中的理论作用.

§11. 实数集的完全性

直至现在，已经推导出的实数集$\boldsymbol{R}$的性质，如各个算律，稠密性，阿基米德性等等，都为有理数集$\boldsymbol{Q}$所具备，没有什么新的性质。本节将要讨论的完全性乃是为$\boldsymbol{R}$所具备而不为$\boldsymbol{Q}$所具备的性质。具备不具备完全性是$\boldsymbol{R}$与$\boldsymbol{Q}$的根本区别，也是我们在$\boldsymbol{Q}$的基础上引入$\boldsymbol{R}$的根本原因。

在§2，我们看到，有理数集$\boldsymbol{Q}$的分割$\{\underline{\xi}，\overline{\xi}\}$有两种情况：一种是上类$\overline{\xi}$有最小数（相应的实数$\xi$叫有理实数），一种是上类$\overline{\xi}$没有最小数（相应的实数$\xi$叫无理实数）。第二种情况的存在反映有理数集$\boldsymbol{Q}$是有“空隙”的（参看图8）。现在的问题是，在本章建立起来的实数集$\boldsymbol{R}$还有没有“空隙”？不妨先从直观上看一下。看图14，其中的ξ表示任一无理实数，当我们对$\boldsymbol{Q}$作分割$\{\underline{\xi}，\overline{\xi}\}$时，我们碰上了$\boldsymbol{Q}$的一个“空隙”。通过映射$(\quad)^*$：$\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{R}$，有理数轴$\boldsymbol{Q}$被原封不动地叠放在实数轴所在的直线上（参看定$15_2$后面的直观解释），得到了一切有理实数点。这时，上述“空隙”自然保留下来。但是，在实数轴$\boldsymbol{R}$上，这个“空隙”被无理实数点ξ填补上了。这样，可以想象，经过对一切“空隙”的填补，实数轴$\boldsymbol{R}$就不再具有“空隙”，而与其所在的直线重合。

以下进行正式论证。

〔定义〕设$A\subset\boldsymbol{R}$，并用$\overline{A}=\boldsymbol{R}\setminus A$记$A$的余集（相对于$\boldsymbol{R}$）。

当且仅当：

1) $A\neq\varnothing$且$\overline{A}\neq\varnothing$（即$A\neq\boldsymbol{R}$）；

2) 对于任何$\xi\in A$及任何的$\xi'\in\overline{A}$，$\xi<\xi'$；

3) A没有最大的（实）数，

我们说$\boldsymbol{R}$的分类$\{A,\overline{A}\}$是一个再分割。A叫做这再分割的下类，$\overline{A}$叫做这再分割的上类。

〔注〕除了把有理数改为实数外，再分割的定义同§2中狄德金德分割的定义完全相同。因此，§2中已证的分割的性质同样适用于再分割，特别是，§2的引理1以及定义中条件2)与条件2)′的等价性，对于再分割来说都正确。

以下的基本定理反映实数集$\boldsymbol{R}$不再具有"空隙"。

〔定理22〕（完全性）设$\{A,\overline{A}\}$是一个再分割，则上类$\overline{A}$必有最小数。

证 在由实数组成的集合A中只保留有理实数，并考虑由对应的有理数组成的集合：

$$\xi=\{a\in\boldsymbol{Q}\,|\,a^*\in A\}.$$

当然，$\xi\subset\boldsymbol{Q}$。以下证明ξ是一个实数：

1)任取$\eta\in A$。按定理21，存在有理实数$a^*<\eta$。于是(参看§2，引理1，i))，$a^*\in A$。由ξ的定义，可知$a\in\xi$，故$\xi\neq\varnothing$。类似地可证$\overline{\xi}\neq\varnothing$。

2)对于任何的$a\in\xi$，$\overline{a}\in\overline{\xi}$，我们有$a^*\in A$，$\overline{a}^*\in\overline{A}$。由再分割定义中的条件2)，$a^*<\overline{a}^*$，于是根据$\boldsymbol{Q}$与$\boldsymbol{Q}^*$关于顺序的同构性，$a<\overline{a}$。

3)对于任何的$a\in\xi$，我们有$a^*\in A$。按再分割定义中的条件3)，可取$\zeta\in A$，使$a^*<\zeta$。根据$\boldsymbol{R}$的稠密性，存在有理

实数b^*，使$a^*<b^*<\xi$。由$b^*<\xi$推出$b^*\in A$，从而$b\in\xi$。由$a^*<b^*$推出$a<b$。可见ξ没有最大（有理）数。

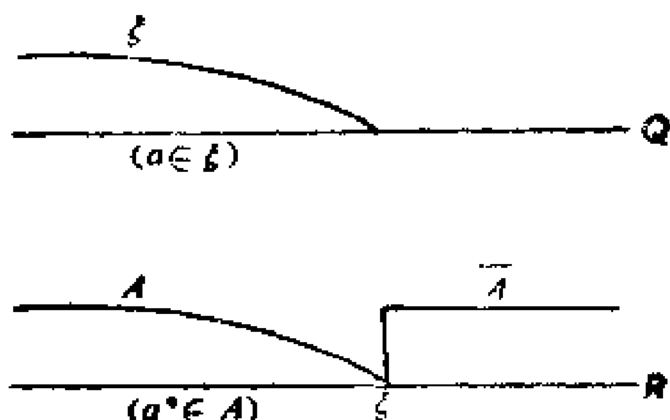


图 15

这就证明了ξ是一个实数。以下证明它恰好是$\overline{A}$的最小数（参看图15）。

首先，$\xi\in\overline{A}$。这是因为，如果$\xi\in A$，则因A没有最大数，故可取$\eta\in A$，使$\xi<\eta$。按$\boldsymbol{R}$的稠密性，存在有理实数a^*，使$\xi<a^*<\eta$。由$a^*<\eta$推出$a^*\in A$，从而$a\in\xi$。于是得到$a^*<\xi$，与$\xi<a^*$矛盾。

其次，比ξ小的任何实数η都不再属于$\overline{A}$。这是因为，可取有理实数a^*，使$\eta<a^*<\xi$。由$a^*<\xi$推出$a\in\xi$，于是由ξ的定义，$a^*\in A$。再由$\eta<a^*$可知$\eta\in A$，即$\eta\notin\overline{A}$。可见ξ是$\overline{A}$的最小数。∎

〔**注**〕由定理的证明可知，如$\{A,\overline{A}\}$是一个再分割，则实数$\xi=\{a\in\boldsymbol{Q}\mid a^*\in A\}$就是上类$\overline{A}$的最小数。

实数集$\boldsymbol{R}$的完全性在数学理论中是很重要的。在十九世纪后期，狄德金德定义了实数并证明了$\boldsymbol{R}$的完全性使得从十七世纪发展起来的微积分有了坚实的理论基础。在当前的微积分教材中，众多的基础性定理都可用它加以证明。不过，在进行逻辑推导时，有时利用由完全性推出的其它定理可能更方便一些。以下就是这样定理中的一个。在叙述定理之前，先引入一个概念：

〔定义〕设$A\subset \boldsymbol{R}$。当仅且当存在$\mu\in\boldsymbol{R}$，使得对于任何的$\xi\in A$，都有$\xi\leqq\mu$，就说集合A有上界，并说μ是A的一个上界。

例如，集合$A=\{\xi\in\boldsymbol{R}\mid$存在$n^*\in\boldsymbol{Z}^+$，使$\xi=1^*-\frac{1^*}{n^*}\}$是有上界的，$1^*$和比$1^*$大的任何实数都是它的上界。又如集合$\boldsymbol{Z}^+$和$\boldsymbol{R}^+$都没有上界。

一般来说，如果集合A有上界μ，则任何比μ大的实数都是A的上界。可见一个有上界的集合必有“无穷多个”①上界。一般来说，“无穷多个”数中不一定有最小数。但是，下面就要证明，在$\boldsymbol{R}$中，一个有上界的非空集合的“无穷多个”上界当中必有最小的一个。

〔定理23〕（最小上界定理）设$A\subset\boldsymbol{R}$且$A\neq\varnothing$。如A有上界，则A必有最小上界。

证 由A的一切上界组成的集合可以写成

$$\overline{U}=\{\eta'\in\boldsymbol{R}\mid \text{对于任何的}\xi\in A,\ \xi\leqq\eta'\}.$$

显然$\overline{U}$的余集（相对于$\boldsymbol{R}$）是

$$U=\{\eta\in\boldsymbol{R}\mid \text{存在}\xi\in A,\ \text{使得}\eta<\xi\}.$$

以下证明$\{U,\overline{U}\}$是一个再分割：

1）因$A\neq\varnothing$，故可取$\xi\in A$。因$\boldsymbol{R}$没有最小数，故可取$\eta\in\boldsymbol{R}$，使$\eta<\xi$。于是$\eta\in U$，故$U\neq\varnothing$。按题设，A有上界，故$\overline{U}\neq\varnothing$。

2）显然，对于任何的$\eta\in U$及任何的$\eta'\in\overline{U}$，都有$\eta<\eta'$。

3）对于任何的$\eta\in U$，按U的定义，存在某个$\xi\in A$，使$\eta<\xi$。按$\boldsymbol{R}$的稠密性，存在$\eta_1\in\boldsymbol{R}$，使$\eta<\eta_1<\xi$。由$\eta_1<\xi$及U的定义推出$\eta_1\in U$。再由$\eta<\eta_1$及$\eta\in U$的任意性，知U没有最大数。

---

①我们没有定义“无穷集”的概念，所以，这里“无穷多个”只能当作直观描述。

这就证明了$\{U, \overline{U}\}$是一个再分割。根据$\boldsymbol{R}$的完全性，可知$\overline{U}$有最小数μ_0。

定理23同定理22一样，反映了实数集$\boldsymbol{R}$没有"空隙"。如果把上界的定义移用到分数集$\boldsymbol{F}$或有理数集$\boldsymbol{Q}$，那么，定理23就不普遍成立了。① 例如，在$\boldsymbol{Q}$中，

$$A=\{a\in\boldsymbol{Q}^{+}\,|\,a^2<2\}$$

是有上界的（例如有理数2就是一个上界），但在$\boldsymbol{Q}$中不存在A的最小上界。

为了应用时方便，我们把$A\subset\boldsymbol{R}$的最小上界μ_0的意义再明确一下：1) μ_0是A的上界，2) $\mu_0\leqq A$的任何上界，也就是说，小于μ_0的任何实数都不是A的上界。这就是：

对于$A\subset\boldsymbol{R}$且$A\neq\varnothing$，所谓A的最小上界μ_0指的是这样一个实数：

1) 对于任何的$\xi\in A$来说，$\xi\leqq\mu_0$；

2) 对于任何的$\zeta\in\boldsymbol{R}$且$\zeta<\mu_0$，存在$\xi_1\in A$，使$\zeta<\xi_1$。

我们把A的最小上界μ_0记作

$$\mu_0=\sup A ②$$

最小上界也叫上确界。

〔定义〕设$A\subset\boldsymbol{R}$。当且仅当存在$\lambda\in\boldsymbol{R}$，使得对于任何的$\xi\in A$，都有$\lambda\leqq\xi$，就是说集合A有下界，并说λ是A的一个下界。

〔**定理24**〕（最大下界定理）设$A\subset\boldsymbol{R}$且$A\neq\varnothing$。如A有

①有趣的是，定理23在自然数集$\boldsymbol{N}$中反而成立。

②有的书籍记作 l.u.b.A。

下界，则A必有最大下界。

不妨利用定理23来证明定理24。这留给读者。

以下再明确最大下界的意义：

对于$A\subset \mathbf{R}$且$A\neq\varnothing$，所谓A的最大下界λ_0指的是这样一个实数：

1）对于任何的$\xi\in A$，$\lambda_0\leq\xi$；

2）对于任何的$\zeta\in\mathbf{R}$且$\lambda_0<\zeta$，存在$\xi_1\in A$，使$\xi_1<\zeta$。

我们把A的最大下界λ_0记作

$$\lambda_0=\inf A①。$$

最大下界也叫下确界。

习　　题

123．证明定理24．

124．设$A\supset R$且$A\neq\varnothing$且A有最大（小）数．试证这最大（小）数就是A的最小上界（最大下界）．

125．不利用定理22，直接用狄德金德分割证明定理23．

126．利用定理23证明定理22，（由定理23的证明和这个习题，可以看出定理22和定理23等价．）

127．我们称型如$s:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{R}$的映射为数列．记$s(n)=s_n$，并记这数列为$(s_n)$．

当且仅当对于任何的$n\in N$，都有$s_n\leq s_{n+1}$（$s_{n+1}\leq s_n$），说数列(s_n)是不减（不增）的，不减数列和不增数列统称为单调数列。

当且仅当一切s_n组成的集合有上（下）界，即存在$\mu\in R$，使对于一切$n\in N$都有$s_n\leq\mu$（$\mu\leq s_n$），说数列(s_n)有上（下）界。

①有的书籍记作 g.l.b.A.

证明以下的单调数列收敛定理：

1）如数列(s_n)不减（不增）且有上（下）界，则存在$\xi\in R$，满足以下条件：对于任何的$\varepsilon\in R^+$，存在$n_0\in N$，使得对于任何的$n\in N$且$n>n_0$，都有

$$\xi-\varepsilon<s_n\leqq\xi\quad(\xi\leqq s_n<\xi+\varepsilon).$$

2）如数列(s_n)不减（不增）且无上（下）界，则对于任何的$\mu\in R^+$，存在$n_0\in N$，使得对于任何的$n\in N$且$n>n_0$，都有

$$\mu<s_n\quad(s_n<-\mu).$$

128．给定数列(a_n)与(b_n)，当且仅当

1）(a_n)不减且(b_n)不增；

2）对于任何的$n\in N$，$a_n<b_n$；

3）对于任何的$\varepsilon\in R^+$，存在$n_0\in N$，使得对于任何的$n\in N$且$n>n_0$，都有

$$b_n-a_n<\varepsilon,$$

就说由闭区间组成的集合$\{[a_n, b_n]\mid n\in N\}$是一个闭区间套。

试证以下的闭区间套定理：

如$\{[a_n, b_n]\mid n\in N\}$是一个闭区间套，则存在唯一的$\xi\in R$，使得对于任何的$n\in N$，$\xi\in[a_n, b_n]$。

§12．正实数的平方根

给定实数ξ，我们看方程

$$\lambda^2=\xi. \qquad (1)$$

如果(1)有解λ，就把λ叫做（1）的一个平方根。由于任何实数自乘都不能是负数，所以，如$\xi<0^*$，则方程（1）无解。其次，如$\xi=0^*$，则显然$\lambda=0^*$是方程（1）的唯一解。

以下设$\xi>0^*$。不难验证，如λ，μ都是方程(1)的解，则$|\lambda|=|\mu|$。由此可见，如方程(1)有解λ，则它有且只有两个解λ与$-\lambda$。因此，可只考虑方程(1)的正实数解，即只考虑正实数的正平方根。我们将证明这样的平方根是存在的（按照上面的讨论，它也是唯一的）。

设

$$A = \boldsymbol{R}^- \cup \{0^*\} \cup \{\eta \in \boldsymbol{R}^+ \mid \eta^2 < \xi\}.$$

首先证明A的第三个子集不是空集。事实上，按$\boldsymbol{R}^+$的阿基米德性，存在正整实数n^*，使得$n^* > \frac{1^*}{\xi}$。不妨还假定$n^* > 1^*$。于是$(n^*)^2 > \frac{1^*}{\xi}$，从而$\left(\frac{1}{n}\right)^* > 0^*$且$\left(\left(\frac{1}{n}\right)^*\right)^2 < \xi$。所以$\left(\frac{1}{n}\right)^*$属于这里$A$的第三个子集。类似地可证$\overline{A} \neq \varnothing$。

以下几乎逐字逐句地重复§2，例2中的论证，可以证明$\{A, \overline{A}\}$是一个再分割。于是根据$\boldsymbol{R}$的完全性，知$\overline{A}$有最小数μ。由上面的论证，知$\mu > 0^*$。

以下证明μ是方程(1)的解。如果不然，则：1)或者$\mu^2 < \xi$。注意到$\mu > 0^*$，可知$\mu \in A$，与$\mu \in \overline{A}$矛盾。2)或者$\mu^2 > \xi$。按$\boldsymbol{R}^+$的阿基米德性，存在正整实数n^*，使$n^* > \frac{1^*}{\mu}$且$n^* > \frac{2^*\mu}{\mu^2 - \xi}$。这就有$\mu - \left(\frac{1}{n}\right)^* > 0^*$且

$$\left(\mu - \left(\frac{1}{n}\right)^*\right)^2 > \mu^2 - \frac{2^*\mu}{n^*} > \xi.$$

于是$\mu - \left(\frac{1}{n}\right)^* \in \overline{A}$，与$\mu$是$\overline{A}$的最小数矛盾。

总而言之，存在$\mu \in \boldsymbol{R}^+$，使

$$\mu^2 = \xi.$$

我们已经得出结论.

对于任何的$\xi \in \boldsymbol{R}^+$，方程$\mu^2 = \xi$有唯一的正实数解μ。

我们把这个正实数μ叫做正实数ξ的算术平方根，记作$\mu = \sqrt{\xi}$①：

①$0^*$的唯一平方根0^*也记作$\sqrt{0^*}$：$\sqrt{0^*} = 0^*$.

$$(\sqrt{\xi})^2=\xi \quad (\xi>0^*, \ \sqrt{\xi}>0^*).$$

方程(1)的另一解是$-\sqrt{\xi}$，此外无解。

现在回头看§1提出的问题。在那里，我们知道，方程$x^2=2$（2是正整数）没有有理数解。现在可以断定，$x^2=2^*$有两个解$\sqrt{2^*}$与$-\sqrt{2^*}$。$\sqrt{2^*}$就是边长为1^*的正方形的对角线长。这就在实数范围里解决了在有理数范围里解决不了的问题。最后指出，由§11，定理22的注可知，$\sqrt{2^*}$就是§2，例2中的实数。可见$\sqrt{2^*}$是无理实数。①

习　题

129．利用最小上界定理证明正实数的算术平方根的存在性．

§13．在实际计算中实数的比较和运算

在本章的理论发展中，关于实数的顺序和运算都有正式的定义。但在实际计算中，一般并不直接按照定义来进行比较和运算。以下讨论在实际计算中如何进行这些工作，并指出理论根据或确切的涵义。

1)参加顺序比较或加法或乘法运算的实数都是有理实数时，我们就按定理15_{2-4}把问题归结为有理数的相应问题（第三章，§15）。例如，因有理数$-\frac{1}{2}<-\frac{1}{3}$，故根据定理$15_2$，有理实数$\left(-\frac{1}{2}\right)^*<\left(-\frac{1}{3}\right)^*$。又如，根据定理$15_3$，

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^*+\left(\frac{1}{3}\right)^*=\left(\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\right)^*=\left(-\frac{1}{6}\right)^*$$

①当然，在§1，已证$x^2=2$没有有理数解，由此并根据Q与$Q^*\subset R$的同构性，也能推出方程$x^2=2^*$的实数解$\sqrt{2^*}$不能是有理实数．

2）参加顺序比较或加法或乘法运算的实数至少有一为无理实数时，我们就利用有理近似值把问题归结为有理实数的问题。为此，首先明确近似值的涵义。对于给定的实数ξ及给定的正实数μ，所谓$\xi_1 \in \boldsymbol{R}$是ξ的精确到μ的弱近似值，指的是以下不等式成立：

$$0^* \leqq \xi - \xi_1 < \mu.$$

所谓$\xi_1 \in \boldsymbol{R}$是ξ的精确到μ的强近似值，指的是以下不等式成立：

$$0^* \leqq \xi_1 - \xi < \mu.$$

在实际应用中，精确度μ及近似值ξ_1取的都是有理实数值。同时，在实际应用中，根据需要，对于实数，特别是无理实数，人们也不过只要它的达到一定精确度的有理近似值就够了。

以下证明任何无理实数的达到任何精确度的有理近似值的存在性。

设ξ是任何给定的无理实数，并设c^*是任何给定的正有理实数。根据§2，引理2以及§8的有关引理，定理和习题，我们知道，存在有理实数a^*及$\overline{a}^*$，使

$$a^* < \xi < \overline{a}^*, \qquad 0 < \overline{a}^* - a^* = c^*.$$

由此推出

$$0 < \xi - a^* < c^*, \quad 0 < \overline{a}^* - \xi < c^*.$$

这说明a^*与$\overline{a}^*$分别是无理实数ξ的精确到c^*的有理弱近似值和有理强近似值。

例如，对于无理实数$\sqrt{2^*}$来说，$\left(\frac{14}{10}\right)^*$，$\left(\frac{141}{100}\right)^*$，$\left(\frac{1414}{1000}\right)^*$分别是它的精确到$\left(\frac{1}{10}\right)^*$，$\left(\frac{1}{100}\right)^*$，$\left(\frac{1}{1000}\right)^*$的有

理弱近似值，$\left(\frac{15}{10}\right)^*$，$\left(\frac{142}{100}\right)^*$，$\left(\frac{1415}{1000}\right)^*$分别是相应的有理强近似值。

下面分别讨论有无理实数参加的顺序比较，加法和乘法。

i）顺序。设ξ无理而η有理。不难看出，当且仅当存在ξ的一个有理弱近似值a^*（不论什么样的精确度），使$\eta \leqq a^*$时，就可断定$\eta < \xi$，当且仅当存在ξ的一个有理强近似值$\overline{a}^*$（不论什么样的精确度），使$\overline{a}^* \leqq \eta$时，就可断定$\xi < \eta$。例如，比较$\sqrt{2^*}$与$\left(\frac{1405}{1000}\right)^*$。因$\left(\frac{1405}{1000}\right)^* < \left(\frac{141}{100}\right)^*$，而后者是我们知道的$\sqrt{2^*}$的一个有理弱近似值，故$\left(\frac{1405}{1000}\right)^* < \sqrt{2^*}$。设$\xi$，$\eta$都是无理的。当且仅当存在$\xi$的一个有理弱近似值$a^*$和$\eta$的一个有理强近似值$\overline{b}^*$，使$\overline{b}^* \leqq a^*$时，就可断定$\eta < \xi$。例如，比较$\sqrt{2^*}$与$\sqrt{3^*}$①。由于$\left(\frac{15}{10}\right)^* < \left(\frac{17}{10}\right)^*$故$\sqrt{2^*} < \sqrt{3^*}$。当然，最后的不等式也可利用算术平方根$\sqrt{2^*}$及$\sqrt{3^*}$的定义，通过比较$2^*$和$3^*$而得到。

ii）加法。设ξ无理而η有理，并设a^*（$\overline{a}^*$）是ξ的精确到c^*的有理弱（强）近似值。则不难验证，$a^* + \eta$（$\overline{a}^* + \eta$）是$\xi + \eta$的精确到c^*的有理弱（强）近似值。设ξ，η都是无理的。如果a^*（$\overline{a}^*$）与b^*（$\overline{b}^*$）分别是ξ与η的精确到$\left(\frac{c}{2}\right)^*$

---

①不难验证，$\sqrt{3^*}$的精确到$\left(\frac{1}{10}\right)^*$，$\left(\frac{1}{100}\right)^*$，$\left(\frac{1}{1000}\right)^*$的有理弱（强）近似值分别可取：

$$\left(\frac{17}{10}\right)^*,\ \left(\frac{173}{100}\right)^*,\ \left(\frac{1732}{1000}\right)^*;$$

$$\left(\frac{18}{10}\right),\ \left(\frac{174}{100}\right)^*,\ \left(\frac{1733}{1000}\right)^*.$$

的有理弱(强)近似值，则不难验证，a^*+b^*（$\overline{a}^*+\overline{b}^*$）是$\xi+\eta$的精确到$e^*$的有理弱（强）近似值。例如，对于$\sqrt{2^*}+\sqrt{3^*}$，可取有理弱近似值与有理强近似值分别如下：

精确到$\left(\frac{1}{10}\right)^*$：$\left(\frac{141}{100}\right)^*+\left(\frac{173}{100}\right)^*=\left(\frac{314}{100}\right)^*$（弱）

$\left(\frac{142}{100}\right)^*+\left(\frac{174}{100}\right)^*=\left(\frac{316}{100}\right)^*$（强）

精确到$\left(\frac{1}{100}\right)^*$：$\left(\frac{1414}{1000}\right)^*+\left(\frac{1732}{1000}\right)^*=\left(\frac{3146}{1000}\right)^*$，（弱）

$\left(\frac{1415}{1000}\right)^*+\left(\frac{1733}{1000}\right)^*=\left(\frac{3148}{1000}\right)^*$①（强）

iii）乘法。由于两个实数的积总可用它们的绝对值的积表示（看乘法的定义2），所以可只考虑两个正实数的积。设$\xi>0^*$无理而$\eta>0^*$有理。如果a^*（$\overline{a}^*$）是ξ的精确到$\frac{e^*}{\eta}$的有理弱（强）近似值，则不难验证，$a^*\eta$（$\overline{a}^*\eta$）是$\xi\eta$的精确到e^*的有理弱（强）近似值。设$\xi>0^*$，$\eta>0^*$都是无理的。适当选取正有理实数u^*，v^*，使$\xi<u^*$，$\eta<v^*$。如果a^*（$\overline{a}^*$）是ξ的精确到$\left(\frac{e}{2v}\right)^*$的有理弱（强）近似值，$b^*$（$\overline{b}^*$）是$\eta$的精确到$\left(\frac{e}{2u}\right)^*$的有理弱(强)近似值，则不难验证，$a^*b^*$（$\overline{a}^*\ \overline{b}^*$）是$\xi\eta$的精确到$e^*$的有理弱（强）近似值。例如，取$2^*>\sqrt{2^*}$，$2^*>\sqrt{3^*}$。对于$\sqrt{2^*}\cdot\sqrt{3^*}$，如要

---

①为了简单，不妨取$\left(\frac{31}{10}\right)^*$，$\left(\frac{32}{10}\right)^*$为精确到$\left(\frac{1}{10}\right)^*$的近似值，$\left(\frac{314}{100}\right)^*$，$\left(\frac{315}{100}\right)^*$为精确到$\left(\frac{1}{100}\right)^*$的近似值。

求精确到$\left(\frac{1}{100}\right)^*$，可取 $a^*=\left(\frac{1414}{1000}\right)^*$，$\overline{a}^*=\left(\frac{1415}{1000}\right)^*$，$b^*=\left(\frac{1732}{1000}\right)^*$，$\overline{b}^*=\left(\frac{1733}{1000}\right)^*$，它们都精确到$\left(\frac{1}{1000}\right)^*<\left(\frac{1}{400}\right)^*$。这就得到$\sqrt{2^*}\cdot\sqrt{3^*}$的达到所需精确度的有理弱近似值$\left(\frac{244}{100}\right)^*$和有理强近似值$\left(\frac{245}{100}\right)^*$。这里已经略去了非有效数字。

习　　题

130. 证实§13中关于和的近似值的估计.
131. 证实§13中关于积的近似值的估计.
132. 研究利用近似值作减法.
133. 研究利用近似值作除法.

§14. 关于记号的约定

早在§8，我们就知道，在映射（　）*：$\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{R}$下，有理数集$\boldsymbol{Q}$与有理实数集$\boldsymbol{Q}^*\subset\boldsymbol{R}$关于顺序，加法和乘法是同构的。在这样的意义下，可以把它们看成是“一样的”。但是，直到现在，为了避免概念上的混淆，我们一直保持用有理数加星号来记与之对应的有理实数。这种顾虑现在可以消除了。我们约定，今后将用记有理数的同样记号来记对应的有理实数，把星号略去。例如，用1记1^*，0记0^*，$\frac{1}{2}$记$\left(\frac{1}{2}\right)^*$，$-\frac{1}{2}$记$\left(-\frac{1}{2}\right)^*$。

附录I　十进小数

我们已经完成了建立实数系基本理论的工作，并涉及到

实际计算实数的问题，这一章本来可以结束了。但考虑到在不少中学教材中实数是用十进小数定义的，所以作为附录，我们准备在本章的理论系统之内简要地论述一下十进小数。不过，论述这一问题需要一些本书前面没有讲过的预备知识。如果按照本书"自给自足"的精神把这些预备知识一一补出，这一部分就会显得过分臃肿。因此，在本附录的论述中，我们将把它们都认为已知。

1° 十进小数

给定整实数 $a \geqslant 0$ 及数列 (b_n)，其中对于每个 $n \in \boldsymbol{N}$，b_n 是整实数且 $0 \leqq b_n < 10$。我们把形如

$$a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} \quad 与 \quad -\left(a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}\right) \qquad (1)$$

的级数叫做十进小数，简称小数，通常把它们记成

$$a.b_1b_2\cdots, \qquad -a.b_1b_2\cdots.$$

首先证明这样的级数收敛。只要证明第一个级数收敛就可以了。事实上，由于对于每个 $n \in \boldsymbol{N}$，$0 \leqq b_n \leqq 9$，而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1$ 收敛，故按正项级数的比较判断法，知级数

$a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$ 收敛于某一实数。

当且仅当存在某个 $n_0 \in \boldsymbol{N}$ 及某个 $l \in \boldsymbol{N}$，使对于任何的 $n \geqq n_0$，都有 $b_{n+l} = b_n$，我们说小数（1）是循环小数。

循环小数有一种特殊情况，这就是，存在某个 $n_0 \in \boldsymbol{N}$，使对于任何的 $n \geqq n_0$，$b_n = 0$。我们把这样的循环小数（1）

叫做有尽小数。①

循环小数的另一种特殊情况是，存在某个$n_0 \in \boldsymbol{N}$，使对于任何的$n \geq n_0$，$b_n = 9$。我们把这样的循环小数(1)叫做以9循环的小数。在这情况下，设n_0是使条件成立的最小自然数（根据$\boldsymbol{N}$的最小数原理）。如$n_0 = 1$，则循环小数(1)等于有尽小数$\pm\left((a+1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0}{10^n}\right)$。如$n_0 > 1$，则循环小数(1)等于在有尽小数$\pm\left(a+\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{b_n}{10^n}+\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{0}{10^n}\right)$中把$b_{n_0-1}$换成$b_{n_0-1}+1$。由此看来，以9循环的小数对于我们是多余的。我们把非以9循环的任何小数叫做标准小数，这里包括不以9循环的循环小数（其中又包括有尽小数）和不循环的小数（当然是非有尽的，即无尽的）。

以下证明：

如果一个实数ξ可以表示成（即等于）一个标准小数，那么这个表示式是唯一的。

只要对(1)中第一个级数证明我们的论断就可以了。设

$$\xi = a + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{10^n},$$

其中右端是标准小数。在这样的假定下，不难验证，对于任何的$n_0 \in \boldsymbol{N}$，永远有

①如n_0是使条件成立的最小自然数，那么，当$n_0=1$时，这有尽小数就等于整实数$\pm a$；当$n_0>1$时，这有尽小数就等于有限和$\pm\left(a+\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{b_n}{10^n}\right)$，即$\pm a.b_1\cdots b_{n_0-1}$。

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} < 1, \qquad 0 \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} < \frac{1}{10^{n_0}}. \qquad (2)$$

现在设$c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$ 也是ξ的标准小数表示式。于是

$$a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}.$$

以下证明这两个级数完全一致．先看整数部分，如果$a \neq c$，例如 $a<c$，则存在某个$m \in \mathbf{Z}^+$，使 $c = a + m$，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} = m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}.$$

由(2)，这里的左端<1，但右端$\geq m \geq 1$，这是不可能的。可见 $a = c$。按照类似的方法并应用第二归纳原理（习题11.）不难证明对于任何的$n \in \mathbf{N}$，$b_n = d_n$。

2° 表实数为十进小数

在1°中已经看到任何一个小数必收敛于某一实数．以下证明：

任何一个实数总可表成（等于）一个标准小数（按1°中末尾的结果，这表示法是唯一的）．

事实上，任给$\xi \in \mathbf{R}$．如$\xi = 0$，则可写

$$0 = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{10^n}.$$

其次，如能对正实数证明了我们的论断，那么，当$\xi < 0$时，就可写

$$-\xi = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}.$$

这样就有

$$\xi = -\left(a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}\right).$$

因此，可只看$\xi > 0$的情形。

设$\xi > 0$。则按$\boldsymbol{R}^+$的阿基米德性，存在$l \in \boldsymbol{Z}^+$，使$\xi < l$。按最小数原理，设l是满足条件的最小数，则$l-1 \leqq \xi < l$。设$a = l-1$，则a是非负整实数，且

$$a \leqq \xi < a+1.$$

由此得到

$$0 \leqq \xi - a < 1. \qquad (3)$$

a就是所求小数的整数部分。以下确定其小数部分的各位数码。根据与上类似的理由，对于每个$n \in \boldsymbol{N}$，可以找到非负整实数t_n，使

$$t_n \leqq 10^n(\xi - a) < t_n + 1, \qquad (4)$$

即

$$0 \leqq (\xi - a) - \frac{t_n}{10^n} < \frac{1}{10^n}. \qquad (5)$$

用以下的条件确定数列(b_n)：

$$\begin{cases} b_1 = t_1 & (6) \\ \text{对于每个}n \in \boldsymbol{N}\text{且}n > 1,\ b_n = t_n - 10t_{n-1}. & (7) \end{cases}$$

运用归纳公理，不难证明，对于任何的$m \in \boldsymbol{N}$，

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{b_n}{10^n} = \frac{t^m}{10^m}. \qquad (8)$$

把（5）和（8）结合起来，我们得到

$$\xi = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}. \qquad (9)$$

以下证明（9）中的级数是标准小数。

1）a和每个b_n符合小数的条件。

事实上，由上已知a是非负整实数。所以只要证明每个整实数b_n符合$0 \leqq b_n < 10$就可以了。对于$n=1$，由（6）及（4），我们有

$$0 \leqq b_1 = t_1 \leqq 10(\xi - a),$$

再由（3），得到

$$0 \leqq b_1 < 10.$$

对于$n > 1$，由（7）及（4），我们有

$$b_n = t_n - 10t_{n-1} > (10^n(\xi - a) - 1) - 10(10^{n-1}(\xi - a))$$
$$= -1.$$

故整实数$b_n \geqq 0$。再由（7）及（4），我们有

$$b_n = t_n - 10t_{n-1} < 10^n(\xi - a) - 10(10^{n-1}(\xi - a) - 1) = 10.$$

这就证明了对于每个$n \in \boldsymbol{N}$，$0 \leqq b_n < 10$。

2）等式（9）右端的小数是标准的。

事实上，如这小数是以9循环的小数，即存在某个$n_0 \in \boldsymbol{N}$，使对于任何的$n > n_0$，都有$b_n = 9$，则

$$\xi = \left(a + \sum_{n=1}^{n_0} \frac{b_n}{10^n}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \left(a + \sum_{n=1}^{n_0} \frac{b_n}{10^n}\right) + \frac{1}{10^{n_0}}.$$

注意到（8），我们将得到等式

$$(\xi - a) - \frac{t_{n_0}}{10^{n_0}} = \frac{1}{10^{n_0}},$$

它就同（5）矛盾。

现在完全证明了任一实数必能表示成标准小数的论断.∎

3° 用长除法化有理实数为小数

对于一般的实数，2°中已经确立了把它表示成标准小数的途径。在本段，对于有理实数，我们将用另一方法——长除法——把它们表示成标准小数。所谓"长除法"指的是我们在小学算术中学会的用"算草"（也叫"竖式"）作除法。

首先，我们叙述算本中的一个性质：对于任何的非负整实数p及任何的正整实数q，存在唯一的非负整实数c及唯一的非负整实数r，使

$$p=cq+r,\quad 且\quad 0\leqq r<q.$$

下面就用这性质来确定我们需要的标准小数。

同上段一样，可只考虑正有理实数的情形。我们知道（习题121），任一正有理实数可以表成两个正整实数之商，因此，可以设$\frac{p}{q}$（其中$p,q\in \mathbf{Z}^+$）为任一正有理实数。

由上，存在唯一的非负整实数c及唯一的非负整实数r_0，使

$$p=cq+r_0\quad 且\quad 0\leqq r_0<q. \tag{10}$$

其次，我们用以下"归纳式"的定义来确定数列(d_n)及(r_n)（这就是所谓的"长除法"或"竖式除法"）：

$$\begin{cases}10r_0=d_1q+r_1\quad 且\quad 0\leqq r_1<q, & (11)\\ 对于每个\ n\in\mathbf{N}\ 且\ n>1,\ 10r_{n-1}=d_nq+r_n\ 且\ 0\leqslant r_n<q, & (12)\end{cases}$$

其中每个d_n及每个r_n都是非负整实数。

以下证明，对于任何的$m\in\mathbf{N}$,

$$\frac{r_0}{q}=\sum_{n=1}^{m}\frac{d_n}{10^n}+\frac{1}{10^m}\left(\frac{r_m}{q}\right). \tag{13}$$

用归纳公理：由（11）可知对于$m=1$，（13）成立。设对于$m-1$（其中$m>1$），（13）成立：

$$\frac{r_0}{q}=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{d_n}{10^n}+\frac{1}{10^{m-1}}\left(\frac{r_{m-1}}{q}\right).$$

但由（12），

$$\frac{r_{m-1}}{q}=\frac{d_m}{10}+\frac{1}{10}\left(\frac{r_m}{q}\right),$$

可见

$$\frac{r_0}{q}=\sum_{n=1}^{m}\frac{d_n}{10^n}+\frac{1}{10^m}\left(\frac{r_m}{q}\right),$$

这就推出了（13）对于m成立。

由（13），注意到$0\leqq r_m<q$，可得

$$0\leqq\frac{r_0}{q}-\sum_{n=1}^{m}\frac{d_n}{10^n}<\frac{1}{10^m}, \tag{14}$$

所以

$$\frac{r_0}{q}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{10^n}$$

再由（10），可得

$$\frac{p}{q}=c+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{10^n}. \tag{15}$$

以下证明（15）中的级数是标准小数。

1）c和每个d_n符合小数的条件。

事实上，c和每个d_n本来就是非负整实数，故只需证明对于每个$n\in\boldsymbol{N}$，

$$d_n<10.$$

对于$n=1$，由（11），

$$d_1=\frac{10r_0}{q}-\frac{r_1}{q}\leqq\frac{10r_0}{q}<10.$$

对于$n>1$，由（12）

$$\frac{10r_{n-1}}{q}-\frac{r_n}{q}\leqq\frac{10r_{n-1}}{q}<10.$$

2）等式右端的小数是标准的。

证法同2°中的部分2)类似。

这就证明了（15）中的级数是有理正实数$\frac{p}{q}$的标准小数表示法，同时，由1°中的结果可知，它是唯一的标准小数表示法，例如，它同按2°中的方法得到的标准小数表示法是一致的。

4° 有理实数与循环小数

我们分两方面来考虑：

1）任一有理实数可以表示成某一标准的循环小数。

只看正有理实数就可以了。在3°中已经证明，由(10)，（11），（12）确定的级数（15）是正有理实数$\frac{p}{q}$的唯一的标准小数表示法。下面证明这个小数必是循环的。事实上，由于对任何的$n\in\boldsymbol{N}$，$0\leqq r_n<q$，所以整实数r_n取值不能超过q个①。这样，$q+1$个数$r_n(1\leqq n\leqq q+1)$不能全不相同。

①这里，用q记与正整实数q对应的自然数．下同．

故存在n_0，$l\in \boldsymbol{N}$，$1\leqq n_0<n_0+l\leqq q+1$，使

$$r_{n_0}=r_{n_0+l}. \tag{16}$$

因(12)中的“商数”d_n及余数r_n都是唯一的，所以由(16)，

$$d_{n_0+1}=d_{(n_0+l)+1},\quad r_{n_0+1}=r_{(n_0+l)+1}.$$

继续运用归纳公理，可知对于任何的$n>n_0$，

$$d_n=d_{n+l}.$$

可见小数（15）是循环的。①

2）任一循环小数收敛于某一有理实数。

只考虑非负小数

$$c+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{10^n}$$

就可以了。设它是循环小数，即存在n_0，$l\in \boldsymbol{N}$，使对于$n\geqq n_0$，$d_{n+l}=d_n$。设

$$A=\begin{cases}c, & \text{当} n_0=1,\\ c+\sum\limits_{n=1}^{n_0-1}\dfrac{d_n}{10^n}, & \text{当} n_0>1;\end{cases}$$

$$B=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{l}\dfrac{d_n}{10^n}, & \text{当} n_0=1,\\ \dfrac{1}{10^{n_0-1}}\sum\limits_{n=1}^{l}\dfrac{d_{(n_0+n-1)}}{10^n}, & \text{当} n_0>1.\end{cases}$$

显然A，B都是（非负的）有理实数。在这样的记法下，我们有

---

① 我们没有考虑从哪位数码开始循环，也没有考虑最小循环节。其实如要考虑它们，只要分别取n_0与l为满足条件的最小数就可以了。

$$c+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{10^n}=A+B\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^{kl}}\right)=A+\frac{B\cdot 10^l}{10^l-1},$$

它是一个有理实数。

5° 总结

Ⅰ）任一实数可表成唯一的标准小数，且任一标准小数收敛于（唯一的）一个实数。

Ⅱ）任一有理实数可表成唯一的标准循环小数（包括有尽小数），且任一标准循环小数（包括有尽小数），收敛于（唯一的）一个有理实数。

把Ⅰ），Ⅱ）结合起来，还有

Ⅲ）任一无理实数可表成唯一的不循环小数（当然是标准的），且任一不循环小数（当然是标准的）收敛于（唯一的）一个无理实数。

6° 对用十进小数定义实数的评论

从5°中的结论Ⅰ），Ⅱ），Ⅲ），可以看出，用标准十进小数定义实数，用其中的循环小数定义有理实数，不循环的小数定义无理实数，看来是可取的。在不少的中学教材中就是这样作的。在这样的定义下，很容易继续定义实数的顺序。但是，十进小数（任何n进小数都类似）有其天然的局限性，即只能使用十个数字0，1，2，3，4，5，6，7，8，9。在进行加法和乘法时，有时需要进位。例如

$$2.492+3.236=5.728.$$

这里和的整数部分固然等于整数部分之和：$2+3=5$，和的

第三位小数码固然等于第三位小数码之和：2+6=8，但对于第一位和第二位小数码来说，就不是这样了。由此看出，很难形式地定义（间接地定义是可能的）两个小数

$$a.b_1b_2\cdots,\qquad c.d_1d_2\cdots$$

的和。如果我们形式地定义它们的和是

$$(a+c).(b_1+d_1)(b_2+d_2)\cdots,$$

那么，得到的数码可能超过9，这结果就不是十进小数了。关于积也是这样。

应该指出，以上的评论完全是从理论的角度出发的，决非贬低十进小数的作用。在人类的生产发展和文化发展中，十进小数起了而且仍在起着其伟大的作用。同时，在中学教学中，用十进小数定义实数还是比较容易被接受的。

附录Ⅱ 坎托尔的实数定义简介

关于实数，除本章介绍的狄德金德用分割的方法进行定义外，另一种重要的定义方法是坎托尔给出的，他用正则序列的方法定义实数。下面对此作一粗略的介绍，有兴趣的读者可参看，例如，勒罗斯库列亚柯夫的《数与多项式》（吴品三译），第六章。

在附录Ⅰ，6°中，我们已经看到，除了对于定义加法和乘法不利以外，用十进小数定义实数还是有其可取之处。这里所谓十进小数指的是如下形式的级数：

$$\pm\left(a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{10^n}\right),$$

其中a与b_n是0或正整数(不是整实数！)且对于每个$n\in\boldsymbol{N}$，

$b_n < 10$。我们知道，给定一个级数 $a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{10^n}$ 等于给定一个序列 (s_m)，其中对于每个 $m\in\boldsymbol{N}$，$s_m=a+\sum_{n=1}^{m}\frac{b_n}{10^n}$。这样，用十进小数定义实数等于用一种特殊类型的有理数序列定义实数。下面所说的“正则序列”就是抛开这种类型的序列的特殊形式而保留其基本特征的有理数序列。

设给定有理数序列(s_n)。当且仅当对于任意的$\varepsilon\in\boldsymbol{Q}^+$，存在$n_0\in\boldsymbol{N}$，使对于任何的$n, m > n_0$，都有

$$|s_n - s_m| < \varepsilon,$$

我们说有理数序列 (s_n) 是正则的。

例如，十进小数 $a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{10^n}$ 的部分和 $s_m=a+\sum_{n=1}^{m}\frac{b_n}{10^n}$ 组成的序列(s_m)是正则序列。又如，在此如设$t_m=s_m+\frac{1}{10^m}$，则序列(t_m)也是正则序列。

我们说正则序列 (s_n) 对等于正则序列 (t_n)，当且仅当，对于任何的$\varepsilon\in\boldsymbol{Q}^+$，存在$n_0\in\boldsymbol{N}$，使对于任何的$n>n_0$，都有

$$|s_n - t_n| < \varepsilon.$$

此时记

$$(s_n)\backsim(t_n).$$

在上面的例子中，$(s_m)\backsim(t_m)$。

不难给出正则序列的顺序，加法和乘法的定义，兹略去。

可以证明对等关系$\backsim$是一切正则序列的集合中的一个等

价关系。我们把一个等价类$[(s_n)]_\backsim$叫做一个实数，并用代表的顺序、加法和乘法定义实数的顺序、加法和乘法。在这样的定义下可以证明全部本章所述的实数的有关顺序与运算的性质，一直到阿基米德性。

可以证明，这样定义的一切实数的集合$\boldsymbol{R}_1$与本章中正文定义的一切实数的集合$\boldsymbol{R}$关于顺序、加法和乘法是同构的。

最后我们指出，在有理数集$\boldsymbol{Q}$的范围内，一个正则序列不一定有极限，但是，可以证明，如果实数序列(ξ_n)满足正则序列的条件，即对于任何的$\varepsilon\in\boldsymbol{R}_1^+$，存在$n_0\in\boldsymbol{N}$，使对于任何的$n, m>n_0$，都有

$$|\xi_n-\xi_m|<\varepsilon,$$

那么序列(ξ_n)必有极限，即存在$\alpha\in\boldsymbol{R}_1$，

$$\lim\xi_n=\alpha.$$

这个性质叫做$\boldsymbol{R}_1$的完全性[1]。可以在本章正文的理论中证明这个完全性，也可以在本附录的理论中证明§11的完全性。

① 连同其逆命题就是微积分中的柯西（Cauchy）收敛准则。

第五章　复　数

§1. 引　言

在第四章，§12，我们看到，当实数$\xi<0$时，方程$\lambda^2=\xi$没有实数解。为了使这样的以及类似的方程有解，还需要在同构的意义下扩充实数系而引入新的数系。应该指出，在历史上，正是从这样的角度引入了新的数——复数（尽管它们长期不被承认），其出发点是纯理论性的，即不是直接从实际需要引出的。但是，从后来数学的发展，特别是复变函数论的发展与广泛应用来看，这个新的数系——复数系是具有很重要的实际价值的。

§2. 复　数

我们将引入新的数系，希望在这数系中，对于任何的数α，方程$\delta^2=\alpha$永远有解δ。这可看成是自乘之逆的问题。正象我们在第二章和第三章解决乘法逆运算和加法逆运算时求助于已知数的序偶（在第二章是自然数序偶，在第三章是分数序偶）那样，我们将用实数序偶引入复数。与前不同的是，在这里，将直接用实数序偶定义复数，而不再经过等价分类的步骤。

在本章，我们约定，如不加声明，五个希腊字母ξ，η，ζ，λ，μ都表示实数。

〔定义〕我们把形如(ξ_1, ξ_2)的序偶叫做一个复数。

例如，(1,2)，$\left(-\frac{1}{3},0\right)$，$(\sqrt{2}, -1)$都是复数；

一切复数的集合$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$记作$\boldsymbol{C}$。

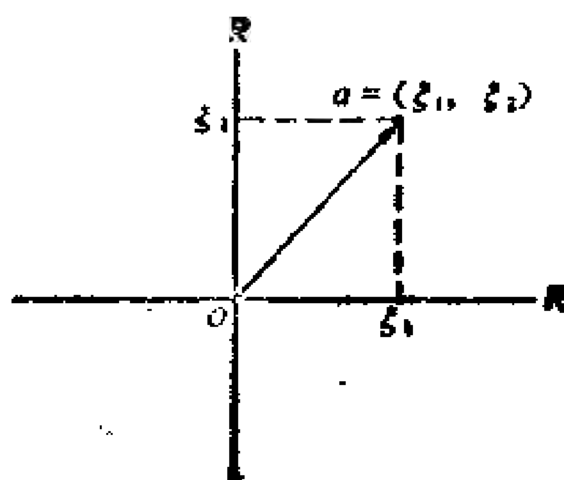


图 16

由于我们对实数序偶集没有进行等价分类而直接用实数序偶定义了复数，所以复数的几何意义就是数平面上的点(图16)。在这意义下，我们又把数平面叫复数平面。

§3．复数的加法和减法

复数加法定义同第三章中分数序偶加法定义一样。用几何的话说就是按平面向量的相加法则（平行四边形法则）来定义复数加法(图17)。

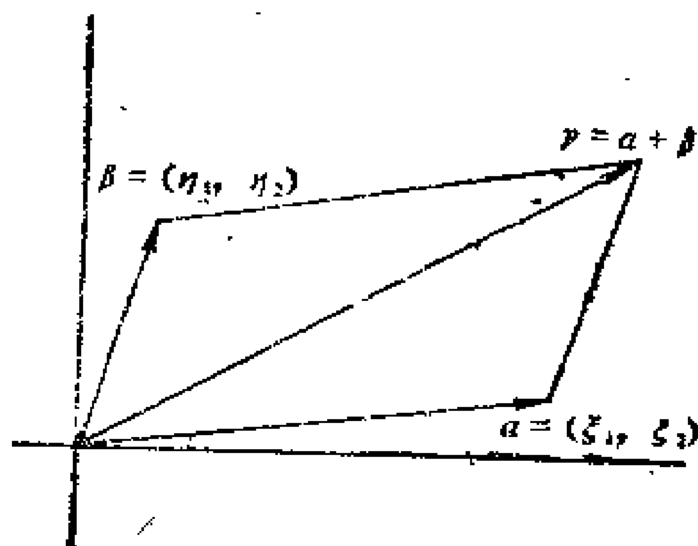


图 17

〔定义〕我们把复数 $\gamma=(\xi_1+_R\eta_1,\ \xi_{2R}+\eta_2)$ 叫做复数 $\alpha=(\xi_1,\xi_2)$ 与 $\beta=(\eta_1,\ \eta_2)$ 的和，记作

$$\gamma=\alpha+_C\beta.$$

在不致引起混淆的情况下，我们把 $+_C$ 中的标记 $\mathbf{C}$ 略去。

我们约定，今后如无特殊规定，我们将用 α，β，γ，δ，ε 这五个希腊字母记复数。

〔**定理 1**〕（交换律）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

〔**定理 2**〕（结合律）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

〔**定理 3**〕（消去律）$\alpha+\gamma=\beta+\gamma\Rightarrow\alpha=\beta$.

这些定理是极易证明的。

我们用 $0^{\oplus}$ 记复数（0，0）：

$$0^{\oplus}=(0,\ 0).$$

复数 $0^{\oplus}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的加法恒等元：

〔**定理 4**〕对于任何的 $\alpha\in\mathbf{C}$，

$$\alpha+0^{\oplus}=\alpha.$$

这是显然的。

〔**定义**〕复数 $(-\xi_1,\ -\xi_2)$ 叫做复数 $\alpha=(\xi_1,\ \xi_2)$ 的相反数，记作 $-\alpha$，

$$-\alpha=(-\xi_1,\ -\xi_2).$$

由定义显然有

$$\alpha+(-\alpha)=0^{\oplus}.$$

〔**引理**〕对于任何的 α，$\beta\in\mathbf{C}$，方程

$$\beta+\delta=\alpha$$

有唯一解 δ。

唯一性的证明可用消去律，存在性的证明可取 $\delta=\alpha+$

$(-\beta)$。

〔定义〕我们把方程$\beta +_C \delta = \alpha$的唯一解$\delta = \alpha +_C (-\beta)$叫做$\alpha$减$\beta$的差，记作$\delta = \alpha -_C \beta$

$$\alpha -_C \beta = \alpha +_C (-\beta)$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去$-_C$中的标记$\mathbf{C}$。

§4. 复数的乘法与除法

复数乘法的定义在形式上同分数序偶乘法的定义小有差别：

〔定义〕我们把复数$\gamma = (\xi_1 \cdot_R \eta_1 -_R \xi_2 \cdot_R \eta_2, \ \xi_1 \cdot_R \eta_2 +_R \xi_2 \cdot_R \eta_1)$叫做复数$\alpha = (\xi_1, \xi_2)$与$\beta = (\eta_1, \eta_2)$的积，记作

$$\gamma = \alpha \cdot_C \beta.$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去$\cdot_C$中的标记$\mathbf{C}$，有时，象通常一样，连$\cdot$也略去。

〔定理 5〕（交换律）$\alpha\beta = \beta\alpha$。

显然。

以下定理 6 — 8 的证明都留给读者。

〔定理 6〕（结合律）$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$。

〔定理 7〕（分配律）$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$。

〔定理 8〕（消去律）$\alpha\gamma = \beta\gamma$且$\gamma \neq 0^{\oplus} \Rightarrow \alpha = \beta$。

下面的定理 9，10都是显然的：

〔定理 9〕对于任何的$\alpha \in \mathbf{C}$，

$$\alpha \cdot 0^{\oplus} = 0^{\oplus}.$$

〔定理10〕$\alpha\beta = 0^{\oplus} \Longleftrightarrow \alpha = 0^{\oplus}$或$\beta = 0^{\oplus}$。

我们用$1^{\oplus}$记复数（1，0）。

$$1^{\oplus}=(1,\ 0).$$

$1^{\oplus}$是复数集$\mathbf{C}$的乘法恒等元。

〔**定理11**〕 对于任何的$\alpha\in\mathbf{C}$，

$$\alpha\cdot 1^{\oplus}=\alpha.$$

显然。

〔**定义**〕 对于复数$\alpha=(\xi_1,\ \xi_2)\neq 0^{\oplus}$，我们把复数$\left(\frac{\xi_1}{\xi_1{}^2+\xi_2{}^2},\ \frac{-\xi_2}{\xi_1{}^2+\xi_2{}^2}\right)$叫做$\alpha$的倒数，记作$\alpha^{-1}$：

$$\alpha^{-1}=\left(\frac{\xi_1}{\xi_1{}^2+\xi_2{}^2},\ \frac{-\xi_2}{\xi_1{}^2+\xi_2{}^2}\right).$$

不难验证，对于任何的复数$\alpha\neq 0^{\oplus}$，

$$\alpha\alpha^{-1}=1^{\oplus}.$$

〔**引理**〕 对于任何的α，$\beta\in\mathbf{C}$，其中$\beta\neq 0^{\oplus}$，方程

$$\beta\delta=\alpha$$

有唯一解δ。并且，当$\alpha\neq 0^{\oplus}$且$\beta=0^{\oplus}$时，方程无解，当$\alpha=\beta=0^{\oplus}$时，任何复数δ是方程的解。

唯一性的证明可利用消去律，存在性的证明可取$\delta=\alpha\beta^{-1}$。其他部分的证明同第三章，§12中引理证明的部分C）一样。

〔**定义**〕 对于任何的α，$\beta\in\mathbf{C}$，其中$\beta\neq 0^{\oplus}$，我们把方程$\beta\cdot_{\mathbf{C}}\delta=\alpha$的唯一解$\delta=\alpha\cdot_{\mathbf{C}}\beta^{-1}$叫做$\alpha$除以$\beta\neq 0^{\oplus}$的商，记作$\delta=\frac{\alpha}{\beta}{}_{\mathbf{C}}$：

$$\frac{\alpha}{\beta}{}_{\mathbf{C}}=\alpha\cdot_{\mathbf{C}}\beta^{-1}.$$

在不致引起混淆的情况下，我们略去 $-_{\mathbf{C}}$ 中的标记$\mathbf{C}$。

〔**注1**〕 按定义，我们有

$$\alpha^{-1} = \frac{1^*}{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0^*).$$

〔注 2〕第三章和第四章中关于加法和乘法的符号法则对复数都成立。

习　题

134. 证明定理 6.

135. 证明定理 7.

136. 证明定理 8.

§5. 复数的平方根·复数i

现在回到本章开始时提出的问题。对于任何的$\alpha \in \mathbf{C}$，看方程

$$\delta^2 = \alpha. \qquad (1)$$

如$\alpha = 0^*$，显然方程(1)有唯一解$\delta = 0^*$。以下设$\alpha = (\xi_1, \xi_2) \neq 0^*$，即$\xi_1$，$\xi_2$不同时为0。

1）设方程(1)有解$\delta = (\mu_1, \mu_2)$，即设存在μ_1，$\mu_2 \in \mathbf{R}$，使

$$(\mu_1{}^2 - \mu_2{}^2, \ 2\mu_1\mu_2) = (\xi_1, \ \xi_2).$$

这就必须有

$$\mu_1{}^2 - \mu_2{}^2 = \xi_1, \qquad (2)$$

$$2\mu_1\mu_2 = \xi_2. \qquad (3)$$

把等式(2)和(3)的两端自乘并相加，得到

$$(\mu_1{}^2 + \mu_2{}^2)^2 = \xi_1{}^2 + \xi_2{}^2. \qquad (4)$$

等式(4)的右端是正实数，故根据第四章，§12 的结果，必须有

$$\mu_1^2+\mu_2^2=\pm\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}.$$ ①

但$\mu_1^2+\mu_2^2\geqq 0$且$\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}>0$，所以只能

$$\mu_1^2+\mu_2^2=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}. \tag{5}$$

由等式(2)和(5)，推出

$$\mu_1^2=\frac{1}{2}\left(\xi_1+\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\right),$$

$$\mu_2^2=\frac{1}{2}\left(-\xi_1+\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\right).$$

不难验证，这两个等式的右端都是非负实数，故根据第四章，§12的结果，必须有

$$\mu_1=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\xi_1+\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)},$$

$$\mu_2=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-\xi_1+\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)}.$$

由(3)可知，当$\xi_2>0$时，这里两等式的右端必须取相同符号；当$\xi_2<0$时，这里两等式的右端必须取相反符号；当$\xi_2=0$时，μ_1，μ_2至少有一为0。这就是说，如设

$$\Delta_1=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\xi_1+\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)},$$

$$\Delta_2=\sqrt{\frac{1}{2}\left(-\xi_1+\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)},$$

那么，当$\xi_2\geqq 0$时，必须有

$$\mu_1=\Delta_1 \text{ 且 } \mu_2=\Delta_2, \tag{6}$$

$$\text{或}\mu_1=-\Delta_1 \text{ 且 } \mu_2=-\Delta_2; \tag{7}$$

当$\xi_2<0$时，必须有

---

① 我们用$a=\pm b$表示$a=b$或$a=-b$.

$$\mu_1 = \Delta_1 \text{ 且 } \mu_2 = -\Delta_2 \qquad (8)$$

$$\text{或 } \mu_1 = -\Delta_1 \text{ 且 } \mu_2 = \Delta_2. \qquad (9)$$

2) 设μ_1，μ_2由(6)（当$\xi_2 \geq 0$）或(8)（当$\xi_2 < 0$）确定，并设$\delta = (\mu_1, \mu_2)$。不难验证，$\pm\delta$是方程(1)的解①。

由此可见，方程(1)有且仅有如上确定的解$\pm\delta$。

我们把方程(1)的解$\pm\delta$叫做复数α的平方根。以上的论证告诉我们，与实数不同，任何复数都有平方根。当$\alpha = 0^{\oplus}$时，$0^{\oplus}$的平方根是唯一的$0^{\oplus}$。当$\alpha \neq 0^{\oplus}$时，α有且仅有两个不同的平方根。

例如，按照上面的公式，复数（-1，0）的平方根是$\pm(0, 1)$。今后，我们用i记复数(0，1)：

$$i = (0, 1).$$

这样就有

$$i^2 = (-1, 0).$$

§6. 实复数和虚复数

以下定义复数的两种特殊情况：

〔定义〕形如$(\xi, 0)$的复数叫实复数，形如$(0, \xi)$的复数叫虚复数。②

我们用$\xi^{\oplus}$记实复数$(\xi, 0)$：

$$\xi^{\oplus} = (\xi, 0).③$$

〔续〕在这样的记号下，上节末尾的等式可以写成

---

① $-\delta$与条件（7），（9）相适应。

② 通常把虚复数叫做“纯虚数”。

③ §3和§5的记号$0^{\oplus}$和$1^{\oplus}$与此记法一致。

$$i^2=(-1)^{\oplus}.$$

以下是虚复数的表示法：

$$i\xi^{\oplus}=(0,\ \xi).$$

〔**定理12**〕任何复数$(\xi_1,\ \xi_2)$可以表示成唯一的实复数$\xi_1{}^{\oplus}$与唯一的虚复数$i\xi_2{}^{\oplus}$之和：

$$(\xi_1,\xi_2)=\xi_1{}^{\oplus}+i\xi_2{}^{\oplus}.$$

证 不难验证

$$(\xi_1,\ \xi_2)=\xi_1{}^{\oplus}+i\xi_2{}^{\oplus}$$

以下证明表示式的唯一性。事实上，如还有

$$(\xi_1,\ \xi_2)=\eta_1{}^{\oplus}+i\eta_2{}^{\oplus},$$

即

$$\begin{aligned}(\xi_1,\ \xi_2)&=(\eta_1,\ 0)+(0,\ 1)(\eta_2,\ 0)\\&=(\eta_1,\ 0)+(0,\ \eta_2)\\&=(\eta_1,\ \eta_2).\end{aligned}$$

可见必有$\eta_1=\xi_1$且$\eta_2=\xi_2$。故$\eta_1{}^{\oplus}=\xi_1{}^{\oplus}$，$\eta_2{}^{\oplus}=\xi_2{}^{\oplus}$。 ▌

例如，$(1,\ 2)=1^{\oplus}+i2^{\oplus}$，

$$(\sqrt{2},\ -1)=(\sqrt{2})^{\oplus}+i(-1)^{\oplus}.$$

对于复数$\alpha=\xi_1{}^{\oplus}+i\xi_2{}^{\oplus}$，通常把两个实复数$\xi_1{}^{\oplus}$和$\xi_2{}^{\oplus}$分别叫做它的实部和虚部，记

$$\xi_1{}^{\oplus}=\mathrm{Re}\ \alpha,\qquad \xi_2{}^{\oplus}=\mathrm{Im}\ \alpha.$$

§7. 实数集嵌入复数集

我们用§6中的$^{\oplus}$所确定的映射$(\quad)^{\oplus}$：$\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$将实数集$\boldsymbol{R}$嵌入复数集$\boldsymbol{C}$。

记一切实复数的集合为$\boldsymbol{R}^{\oplus}$。

〔定理13_1〕设 $(\ \ )^{\oplus}$: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$, 其中

$$\xi^{\oplus}=(\xi,\ 0),$$

则$(\ \ )^{\oplus}$是单射，且$\boldsymbol{R}$的象就是实复数集$\boldsymbol{R}^{\oplus}$，这就是说，$(\ \ )^{\oplus}$是从$\boldsymbol{R}$到$\boldsymbol{R}^{\oplus}$的一个一一对应。

〔**定理13_2**〕$(\xi+_R\eta)^{\oplus}=\xi^{\oplus}+_C\eta^{\oplus}$.

〔**定理13_3**〕$(\xi\cdot_R\eta)^{\oplus}=\xi^{\oplus}\cdot_C\eta^{\oplus}$.

这都留给读者证明。

在定理13_{1-3}的意义下，我们说，

在映射$(\ \ )^{\oplus}$下，实数集$\boldsymbol{R}$与实复数集$\boldsymbol{R}^{\oplus}\subset_C$关于$+_R$，与$+_C$，$\cdot_R$与$\cdot_C$是同构的。或说，关于$+_R$与$+_C$，$\cdot_R$与$\cdot_C$实数集$\boldsymbol{R}$被同构地嵌入复数集$\boldsymbol{C}$。

习　　题

137. 证明定理13_1.
138. 证明定理13_2.
139. 证明定理13_3.
140. 证明$(\xi-_R\eta)^{\oplus}=\xi^{\oplus}-_C\eta^{\oplus}$.
141. 证明$\left(\frac{\xi}{\eta}{}_R\right)^{\oplus}=\frac{\xi^{\oplus}}{\eta^{\oplus}}{}_C$ $(\eta\neq0)$.

§8．正整实复数集代替正整实数集

〔**定义**〕用η记正整实数，形如$\eta^{\oplus}$的实复数叫正整实复数。

一切正整实复数的集合记作$\boldsymbol{N}^{\oplus}$.

我们指出：

在映射$(\ \ )^{\oplus}$下，正整实数集$\boldsymbol{Z}^{+}\subset\boldsymbol{R}$与正整实复数集

$N^0 \subset C$关于加法和乘法同构。

理由同以前一样。

〔定理14〕 在N^0中，用$1^\oplus$代替自然数集N中的1，并如下定义后继映射$(\ \ )^{+N_0}: N^0 \to N^0$：

$$(n^\oplus)^{+N_0} = (n^{+Z^+})^\oplus$$

（叫做$n^\oplus$的后继者）则N^0满足N的裴阿诺公理。

〔定理15〕 正整实复数集N^0的加法和乘法分别满足自然数集N的加法和乘法定义。

这两个定理的证明也同以前一样。

由这两个定理可以断定，正整实复数集N^0具有第一章中关于自然数集N的一切性质。这样，作为复数集C的子集，正整实复数集N^0就可以代替正整实数集Z^+（它已在第四章，§9代替了正整数集J^+，J^+已在第三章，§16代替了整数集W，而后者又已在第二章，§13代替了自然数集N），而在C的内部继续起着自然数集N的作用。

§9. 在实际计算中复数的加法与乘法运算

设α，β是任意两个复数，

1） 如$\alpha = \xi^\oplus$，$\beta = \eta^\oplus$都是实复数，我们可按定理13_2或定理13_3把运算归结为相应的实数的运算。例如，根据定理13_2，

$$2^\oplus + (-3)^\oplus = (2 + (-3))^\oplus = (-1)^\oplus,$$

根据定理13_3，

$$2^\oplus \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\oplus = \left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\oplus = (\sqrt{2})^\oplus$$

2） 对于一般的复数$\alpha = (\xi_1, \xi_2)$，$\beta = (\eta_1, \eta_2)$来说，由

定理12，

$$\alpha=\xi^{\oplus}_1+i\xi_2{}^{\oplus},\qquad \beta=\eta_1{}^{\oplus}+i\eta_2{}^{\oplus}.$$

这样，对α，β进行运算时，除了注意到$i^2=(-1)^{\oplus}$以外，就可以象对待实数一样地进行运算了，例如，根据复数的算律，

$$\begin{aligned}(2^{\oplus}+i3^{\oplus})(4^{\oplus}+i(-1)^{\oplus})&=(2^{\oplus}\cdot4^{\oplus}+i^2(3^{\oplus}\cdot(-1)^{\oplus}))\\&\quad+i(2^{\oplus}\cdot(-1)^{\oplus}+3^{\oplus}\cdot4^{\oplus})\\&=11^{\oplus}+i10^{\oplus}\end{aligned}$$

应该指出，部分2）所述不过说明对复数的运算可以通过定理12和公式$i^2=(-1)^{\oplus}$象对待实数一样地进行，而不必记住诸如乘法定义中的公式等等。其实，在复数的加法和乘法定义中已经直接把问题归结为实数的运算了。这和第二、第三、第四章相应的问题是不同的。比如上例，由定义立刻得到

$$\begin{aligned}(2,\ 3)(4,\ -1)&=(2\cdot4-3\cdot(-1),\ 2\cdot(-1)+3\cdot4)\\&=(11,\ 10).\end{aligned}$$

§10. 复数的绝对值·共轭复数

在讨论本题之前，我们先谈一谈复数的“顺序问题”。当我们谈到一个数集——不论是自然数集$\boldsymbol{N}$，分数集$\boldsymbol{F}$、有理数集$\boldsymbol{Q}$，或是实数集$\boldsymbol{R}$——的顺序，即$<$关系时，这个关系首先要满足以下条件①：对于这个数集的任何元素x, y, z：

1） （三歧性）以下三种情形恰好有一种成立：

$$x=y,\quad x<y,\quad y<x.$$

---

① 通常叫做“全序条件”。

2）（传递性）$x<y$ 且 $y<z \Rightarrow x<z$。

在各种数集中还要进行加法运算和乘法运算。当<关系与运算+和·相联系时，还要满足以下条件：对于这个数集的加法恒等元0及这个数集的任何元素 x，y，z：

③（加法单调性）$x<y \Rightarrow x+z<y+z$。

④（乘法单调性）$x<y$ 且 $0<z$① $\Rightarrow x \cdot z<y \cdot z$。

现在看能否在复数集 $\mathbf{C}$ 中定义<关系，满足所有这些条件？

如果不考虑复数的运算，只管1)，2)两条，则可用多种方式定义 $\mathbf{C}$ 中的<关系。例如，对于任何两个复数 $\alpha=(\xi_1, \xi_2)$，$\beta=(\eta_1, \eta_2)$，我们规定，当且仅当

$$\xi_1<\eta_1$$
$$\text{或}\ \xi_1=\eta_1\ \text{且}\ \xi_2<\eta_2$$

时，说 $\alpha<\beta$。不难验证，这样定义的<关系满足条件1），2）。但是，下面就要证明，在 $\mathbf{C}$ 中不论怎样定义<关系，都不能满足全部条件1）—4）。

事实上，假如 $\mathbf{C}$ 中存在<关系，同时满足1）—4）。看 $0^{\oplus}=(0,0)$ 和 $i=(0,1)$。它们是不相等的，故根据1），有且仅有以下两种情形：

a）$0^{\oplus}<i$。此时由4)，$0^{\oplus}\cdot i<i\cdot i=i^2$，即 $0^{\oplus}<(-1)^{\oplus}$。再由4)，$0^{\oplus}\cdot i<(-1)^{\oplus}\cdot i$，由此不难推出 $0^{\oplus}<-i$。由3)及2)，$0^{\oplus}+0^{\oplus}<i+(-i)$，即 $0^{\oplus}<0^{\oplus}$，这就同1)矛盾。

b）$i<0^{\oplus}$。此时由3)，$i+(-i)<0^{\oplus}+(-i)$，即 $0^{\oplus}<-i$。由4)，$i\cdot(-i)<0^{\oplus}\cdot(-i)$，即 $1^{\oplus}<0^{\oplus}$。再由4)，$1^{\oplus}\cdot(-i)$

① 自然数集 $\boldsymbol{N}$ 与分数集 $\boldsymbol{F}$ 没有加法恒等元，对于它们，可不管条件 $0<z$。

$<0^{\oplus}\cdot(-i)$，即$-i<0^{\oplus}$。这连同已推出的$0^{\oplus}<-i$也与1）矛盾。 ▌

可见在$\mathbf{C}$中不可能定义同时满足条件1)—4)的<关系。不过，在应用中，我们也不需要比较两个复数的大小，在必要时，只要比较它们的绝对值（实数）的大小就够了。

〔**定义**〕 对于任何的复数$\alpha=(\xi_1,\ \xi_2)$，我们把实数$\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$叫做α的绝对值①，记作$|\alpha|$：

$$|\alpha|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}.$$

用几何的话说，一个复数α的绝对值就是作为向量的α的长（参看图16）。

〔注 1〕 应该指出，这里定义的复数绝对值同第四章，§5中定义的实数绝对值尽管用同样的记号表示，终究是不同的概念。但是，对于实复数来说，二者是"一致的"，这指的是

$$|\xi^{\oplus}|=|\xi|.$$

（左端表复数的绝对值，右端表实数的绝对值）

事实上，$|\xi^{\oplus}|=\sqrt{\xi^2+0^2}=\sqrt{\xi^2}=|\xi|$。

〔**注 2**〕 显然有$|\alpha|=|-\alpha|$。

〔**定理16**〕 对于任何的$\alpha,\ \beta\in\mathbf{C}$：

1） $|\alpha|\geqq 0$。当且仅当$\alpha=0^{\oplus}$时，$|\alpha|=0$。

2） （三角形不等式） $|\alpha+\beta|\leqq|\alpha|+|\beta|$。

性质2）的几何意义是三角形两边长之和大于第三边长（参看图17）。

---

① 有时也叫做α的模。

证 1) 显然。

2) 对于任何的λ, $\mu\in\boldsymbol{R}$, 总有

$$(\lambda-\mu)^2\geqq 0.$$

由此得到

$$2\lambda\mu\leqq\lambda^2+\mu^2. \qquad (1)$$

当α,β有一为0^*时，2)中的等式成立。以下设$\alpha\neq 0^*$且$\beta\neq 0^*$，并设$\alpha=(\xi_1, \xi_2)$, $\beta=(\eta_1, \eta_2)$。在(1)中，取

$\lambda=\frac{|\xi_1|}{|\alpha|}$, $\mu=\frac{|\eta_1|}{|\beta|}$, 可得

$$\frac{2|\xi_1\eta_1|}{|\alpha|\cdot|\beta|}\leqq\frac{\xi_1^2}{|\alpha|^2}+\frac{\eta_1^2}{|\beta|^2}.$$

同样，

$$\frac{2|\xi_2\eta_2|}{|\alpha||\beta|}\leqq\frac{\xi_2^2}{|\alpha|^2}+\frac{\eta_2^2}{|\beta|^2}.$$

把两个不等式相加，注意到$|\alpha|^2=\xi_1^2+\xi_2^2$, $|\beta|^2=\eta_1^2+\eta_2^2$，我们得到

$$2(|\xi_1\eta_1|+|\xi_2\eta_2|)\leqq 2\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}.$$

因$\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2\leqq|\xi_1\eta_1|+|\xi_2\eta_2|$，故

$$2(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)\leqq 2\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}.$$

在不等式两端同时加上$(\xi_1^2+\xi_2^2)+(\eta_1^2+\eta_2^2)$，我们得到

$$(\xi_1+\eta_1)^2+(\xi_2+\eta_2)^2\leqq\left(\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}+\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}\right)^2.$$

按复数绝对值的定义，这就是

$$|\alpha+\beta|^2\leqq(|\alpha|+|\beta|)^2.$$

因$|\alpha+\beta|\geqq 0$且$|\alpha|+|\beta|>0$，故

$$|\alpha+\beta|\leqq|\alpha|+|\beta|.$$

〔**定理17**〕 $|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$.

这是极易验证的。

分别由定理16和17还不难推出

$$|\alpha-\beta|\geqq|\alpha|-|\beta|.$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}\qquad(\beta\neq 0^{\oplus}).$$

与复数绝对值密切联系的一个概念是共轭复数的概念。

〔定义〕 对于复数$\alpha=(\xi_1,\ \xi_2)$，我们把复数$(\xi_1,\ -\xi_2)$叫作α的共轭复数，记作$\overline{\alpha}$：

$$\overline{\alpha}=(\xi_1,\ -\xi_2).$$

〔注 1〕 显然α也是$\overline{\alpha}$的共轭复数，即

$$\overline{\overline{\alpha}}=\alpha.$$

〔注 2〕 不难验证，当且仅当α是实复数时，

$$\overline{\alpha}=\alpha.$$

〔注 3〕 显然，对于任何的$\alpha\in\mathbf{C}$，

$$|\alpha|=|\overline{\alpha}|.$$

〔注 4〕 $\operatorname{Re}\ \alpha=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2^{\oplus}}$， $\operatorname{Im}\ \alpha=\dfrac{\alpha-\overline{\alpha}}{2^{\oplus}}$.

事实上，如设$\alpha=(\xi_1,\ \xi_2)$，则 $\overline{\alpha}=(\xi_1,-\xi_2)$，于是，

$$\alpha+\overline{\alpha}=(2\xi_1,\ 0)=(2\xi_1)^{\oplus}=2^{\oplus}\cdot\xi_1^{\oplus}\quad(\text{定理}13_4)$$
$$=2^{\oplus}\cdot\operatorname{Re}\ \alpha,$$

故

$$\operatorname{Re}\alpha=\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2^{\oplus}}.$$

类似可得

$$\operatorname{Im}\alpha=\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2^{\oplus}}.$$

〔定理18〕 $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$.

〔定理19〕 $\overline{\alpha\cdot\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$.

这都不难验证。由此还可推出

$$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta},$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}},\qquad(\beta\neq0^{\oplus}).$$

以下是复数绝对值与共轭复数之间的基本联系：

〔定理20〕 $\alpha\overline{\alpha}=(|\alpha|^2)^{\oplus}$.

证 设$\alpha=(\xi_1,\ \xi_2)$，则$\overline{\alpha}=(\xi_1,\ -\xi_2)$，于是

$$\alpha\overline{\alpha}=(\xi_1{}^2+\xi_2{}^2,\ 0)=(|\alpha|^2,\ 0)=(|\alpha|^2)^{*}.$$

由此还不难推出，当$\alpha\neq0^{\oplus}$时，

$$\alpha^{-1}=\frac{1^{\oplus}}{\alpha}=\frac{\overline{\alpha}}{(|\alpha|^2)^{\oplus}},$$

这同α^{-1}的定义是一致的。

§11. 关于记号的约定

在§7，我们已经看到，在映射$(\ \ )^{\oplus}$下，实数集$\boldsymbol{R}$与实复数集$\boldsymbol{R}^{\oplus}\subset\boldsymbol{C}$关于加法与乘法同构（按§9，注1，它们关于取绝对值也同构）。在这样的意义下，可以把它们看成是"一样的"。现在约定：和通常一样，用记实数的同样记号

来记对应的实复数，把$^{\oplus}$号略去。

例如，用1记$1^{\oplus}$，$-\sqrt{2}$记$(-\sqrt{2})^{\oplus}$，$\sqrt{2}+i\cdot(-1)$记$(\sqrt{2})^{\oplus}+i\cdot(-1)^{\oplus}$。又如，§6的注解中的公式记为

$$i^2=-1.$$

作为本书的结尾，除记号的约定外，我们还作以下关于名称的约定：如果是在复数集**C**里考虑问题，就把实复数简称为实数。如果是在实数集**R**里考虑问题，就把有理实数简称为有理数，把整实数简称为整数①，把正整实数简称为正整数。同样，在**C**内，也把正整实复数简称为正整数。

这就是通常对于各类数的名称的涵义。学过"数系"的读者应该清醒地看到这些名称背后的涵义。

---

① 这指的是第四章的**Z**中的数，同第2章的**W**中的整数是两回事。

索　引

（词后的数字指页数）

一画——三画

四　画

五　画

六　画

七 画

八 画

九 画

十 画

十一画

十二画

十三画—十八画

十一画

十二画

十三画—十八画